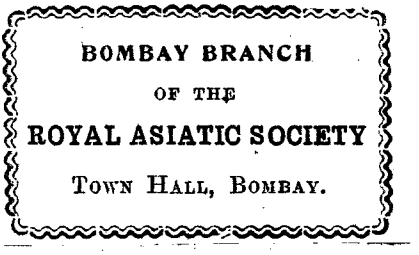
RECHERCHES
SUR
LA REFRACTION
ASTRONOMIQUE

KOWALSKI

God
Fr 522.22
Kow/Rec
101910

00101910

B.B.R.A.S.



Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 18 July, 2018

RECHERCHES

SUR

LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE.

par

101910

M. KOWALSKI

professeur d'astronomie à l'université de Kasan

KASAN. 1878.

Imprimerie de l'université.

Gcd
Fo 522.22
Kow/Rec
101910
Ref:
d/Fo 432

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Казанскаго Университета 24 мая 1872 г.

00101910

PRÉFACE.

La question de la réfraction astronomique a été l'objet de beaucoup de recherches le siècle passé, et surtout le siècle présent. Quoique les travaux de Kramp, Laplace, Bessel, Biot et autres aient perfectionné la théorie d'une manière notable, cependant il est resté quelques imperfections que la théorie n'a pas été en état de faire disparaître. L' insuffisance de la théorie d'expliquer la grande variabilité de la réfraction terrestre qui, dans certaines circonstances, peut devenir égale à zéro, (ce que ne peuvent aucunement admettre les théories connues) et l'insuffisance du coefficient théorique qui dépend de la température de l'air, dans le cas où l'astre se trouve près de l'horizon, l'insuffisance qui se montre clairement dans les observations, ces deux imperfections présentent des faits qu'il a fallu attribuer à l'inexactitude de la théorie elle même, ou à des causes étrangères qui produisent, dans l'atmosphère, des perturbations qui n'existent pas à l'état normal.

Cette dernière circonstance, d'après l'opinion de la plupart des savants a été la cause principale produisant l'écart qui existe entre la théorie et l'observation. M. Bruhns [1] dont l'ouvrage sur la réfraction jouit d'une réputation méritée était d'avis que nous possédons un nombre suffisant de théories pour pouvoir, à cause de leur variété, en choisir une entre elles qui puisse exprimer les observations avec une exactitude suffisante.

---

[1] Die astr. Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwickelung. Leipzig. 1861.

IV

Dans l'atmosphère terrestre, la relation entre la hauteur de la couche de l'air, la température, la densité, la pression qu'elle éprouve doit être donnée par trois équations pour avoir la possibilité d'exprimer trois de ces quantités en fonction de la quatrième. Comme, outre la loi de Gay-Lussac et de Mariotte, nous ne connaissons qu'une équation exprimant la condition d'équilibre de la couche aérienne, il manque donc une troisième équation pour compléter la solution de notre problème. Les auteurs précédents ont choisi différentes formules empiriques contenant les quantités nommées plus haut, en déterminant des quantités constantes qui y sont comprises, ou, au moyen de la réfraction observée, ou à l'aide de l'abaissement de la température correspondant à une couche d'air qui se trouve à une hauteur donnée. Mais aucun des auteurs ne s'est posé les questions suivantes: en quoi la théorie qu'ils proposent se distingue-t-elle des précédentes, et quels nouveaux perfectionnements renferme-t-elle. Dans le paragraphe 5 de ce mémoire je m'occupe de cet objet, et j'arrive à la conclusion que toutes les théories, à l'exception de celle de Bessel, donnent des résultats presque identiques pour la densité des couches de l'air et, par conséquent, pour la réfraction. Cette coïncidence des résultats devient évidente quand nous tenons compte des mêmes observations qui doivent servir à déterminer les quantités constantes qui entrent dans les formules empiriques adoptées. De cette manière les défauts d'une théorie ont lieu aussi pour toutes les autres.

La question de savoir à quelle répartition de la chaleur dans l'atmosphère se produit l'équilibre, ne peut pas être résolue par les formules empiriques d'une manière satisfaisante; l'analyse seule peut montrer les conditions de cet équilibre. Depuis le perfectionnement de la théorie mécanique de la chaleur, des essais ont été faits pour trouver ces conditions. Lubbock en 1856, autant que je sache, a essayé le premier de trouver la solution de cette question en partant des principes de cette théorie. Si les essais de Lubbock et des autres n'ont pu conduire à une solution satisfai-

sante il faut en attribuer la cause à des hypothèses additionnelles peu probables, adoptées par ces derniers. La plupart des savants que cette question a intéressés supposent que, dans l'air atmosphérique en équilibre, l'abaissement de la température dans les différentes couches est proportionnel à la hauteur. Cette loi est la conséquence nécessaire de la supposition que l'énergie calorique reste partout constante. Les écarts de cette loi par rapport aux observations sont attribués au dégagement de la chaleur de la vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère; cette chaleur devenant libre, quand la vapeur passe à l'état liquide, est capable de chauffer l'air autant que cela est nécessaire pour annuler ou au moins affaiblir la différence entre l'observation et la loi d'abaissement de température énoncée plus haut.

Thomson le premier, dans son mémoire „On the convective equilibrium of temperature in the atmosphere“ (1) a formulé cette pensée, et il a montré par le calcul que le rapport de la variation de la hauteur de la couche de l'air correspondant à un degré de l'abaissement de la température, calculé dans cette hypothèse, se trouve d'accord avec l'observation du moins pour les couches inférieures, si toutefois l'air était saturé par la vapeur. Quant aux couches supérieures de l'air, si la saturation par la vapeur n'a pas lieu, l'abaissement de température, d'après Thomson, doit varier proportionnellement à la hauteur, par un ciel sans nuages, à raison de 330 pieds par degré.

Une explication pareille à été donnée, dans la suite, par M. Mendeleyeff, professeur à l'université de Pétersbourg, sans savoir que Thomson l'avait déjà donnée. M. Mendeleyeff, dans le Journal de la société physico-chimique de l'année 1875, montre que, en admettant que l'air soit partout saturé par la vapeur, la chaleur qui se dégage de la vapeur par sa condensation échauffe suffisamment l'air qui se trouve à une certaine hauteur pour que sa température diffère peu de celle observée par Glaisher.

(1) Proceedings of the literary and philosophical society of Manchester. Vol. 2. 1862.

VI

En 1867, dans la réunion de la société des naturalistes à S. Pétersbourg, j'ai montré que toutes les explications données jusque là sur le décroissement de la température dans l'atmosphère, se trouvant en désaccord avec les observations, ne peuvent être reconnues comme justes, et que les principes de la théorie de gaz permanents suffisent pour nous conduire à la formation de l'équation exprimant l'équilibre de l'atmosphère. En comparant la formule que j'ai déduite, qui donne la température d'une couche aérienne en fonction de sa densité et de la température observée à la surface de la terre, j'ai montré qu'elle est parfaitement d'accord avec l'observation.

Il n'est pas douteux que l'échauffement de l'atmosphère par la chaleur dégagée par la vapeur à sa condensation puisse fortement influencer l'état normal de l'atmosphère surtout dans ses couches inférieures; cependant l'influence de cette chaleur, comme passagère, et, par conséquent, pouvant, par un ciel clair, ne pas se produire, doit être considérée comme un phénomène secondaire.

Pour que le lecteur puisse parfaitement comprendre pourquoi je regarde, comme insuffisante, la théorie de Thomson et de Mendeleyeff je me permets d'entrer dans quelques détails.

Supposons que v désigne le volume d'un kilogramme d'air, p la pression sous laquelle il se trouve et T la température absolue. Désignons par C_0 la capacité calorique de l'air à volume constant, par C_1 la capacité calorique à pression constante, et par S l'équivalent mécanique de la chaleur; la théorie mécanique de la chaleur nous fournit, pour la valeur de l'énergie calorique élémentaire, l'expression suivante:

$$dQ = C_0\, dT + \frac{p\, dv}{S}. \qquad (1)$$

La loi de Gay-Lussac et de Mariotte donne

$$p\, v = S\,(C_1 - C_0)\, T. \qquad (2)$$

Selon l'opinion de Thomson et celle de Mendeleyeff la quantité dQ

n'est due qu'à la chaleur qui se dégage par la condensation de la vapeur d'eau. Comme sa valeur peut facilement être calculée, la tension de la vapeur contenue dans l'atmosphère étant une fonction connue de la température T, il s'en suit que la détermination de toutes les quantités variables en fonction de l'une d'entre elles ne présentera aucune difficulté. M. Mendeleyeff, par l'élimination, a trouvé l'équation différentielle entre les variables p et T. M. Thomson a donné l'expression de la variation de la hauteur de la couche aérienne relative à la variation d'un degré centigrade de température, cette expression étant donnée en fonction des quantités T, p et v. Il trouve pour la valeur de cette variation les nombres: 499, 611, 751, 900 ... pieds, quand la température observée à la surface de la terre était respectivement égale à 0°, 10, 20, 30 ... degrés. Pour la température très basse d'hiver, où la tension de la vapeur devient presque nulle, on trouverait 330 pieds.

Il est surprenant que ni l'un ni l'autre n'aient pas remarqué que l'intégration de la formule (1), dans l'hypothèse admise, s'effectue facilement. En effet soit h la hauteur de la couche de l'air, on a, par la formule barométrique connue, l'équation suivante:

$$v\,dp = -\,dh.$$

Mais la formule (2) donne

$$p\,dv + v\,dp = S(C_1 - C_0)\,dT.$$

En éliminant les quantités $p\,dv$ et $v\,dp$ de ces deux dernières équations et l'équation (1) on trouve

$$dQ = C_1\,dT + \frac{dh}{S}.$$

Soient Q_0, T_0 et h_0 les valeurs des variables Q, T et h correspondant à la limite inférieure de la couche aërienne dont l'épaisseur est $h - h_0$ on aura,

$$Q - Q_0 = C_1(T - T_0) + \frac{h - h_0}{S},$$

d'où l'on obtient

$$T_0 - T = \frac{h - h_0}{C_1 S} - \frac{Q - Q_0}{C_1}. \qquad (3)$$

Les valeurs numériques des quantités C_1 et S étant connues, savoir $C_1 = 0{,}2377$, $S = 425$, et par conséquent $C_1 S = 101$ mètres, on déduit la conclusion que, dans le cas où $Q - Q_0$ est nul, le décroissement de la température dans l'atmosphére doit être proportionnel à la hauteur de la couche, étant égal à un degré centigrade pour 101 mètres de hauteur. Comme le décroissement observé se trouve plus faible, M. Thomson et Mendeleyeff rendent compte de ce désaccord par l'influence de la chaleur Q devenue sensible par le passage à l'état liquide de la vapeur d'eau qui se trouve à la hauteur h_0. On y suppose qu'à cette hauteur, l'air est saturé par la vapeur et que, étant transporté à la hauteur h, ladite vapeur se condense.

Dans ce cas $\frac{Q - Q_0}{C_1}$ est égal au produit de 600 *calories* dégagés par un kilogramme de la vapeur multipliés par le rapport de la densité de la vapeur à celle de l'air et par le rapport de la tension de la vapeur à celle de l'air. On sait que ce dernier rapport est très faible pour des températures très basses, et il augmente rapidemment avec la température; il s'en suit donc que, pendant l'hiver où la température de l'air peut devenir très basse, et pendant l'été pour les couches élevées de l'atmosphère, l'influence du dernier terme de la formule (3) est faible, tandis que pendant l'été, et pour des couches aériennes peu élevées, la valeur de ce terme augmente rapidement avec l'augmentation de la température. Ainsi l'analyse précédente basée sur les idées de Thomson et Mendeleyeff conduit à cette conclusion que l'abaissement de la température, pour les couches de même épaisseur, doit être plus fort en hiver et pour des couches élevées de l'atmosphère qu'en été dans les couches inférieures.

Si l'on consulte l'observation, on trouve des résultats diamétralement opposés.

IX

L'hypothèse de Lubbock sur la constitution de l'atmosphère ressemble beaucoup à celle admise par Thomson et Mendeleyeff; elle n'en diffère que par une légère modification de la valeur de la quantité $\frac{Q-Q_0}{C_1}$. D'après Lubbock cette quantité varie proportionnellement à la température de la couche, c'est à dire elle varie dans le même sens, mais dans un rapport moins fort que d'après Thomson et Mendeleyeff. L'hypothèse de Lubbock est exposée à la page 43 de ce mémoire, et les conséquences qui en dérivent pour la valeur de l'abaissement de la température dans les différentes couches de l'atmosphère sont les mêmes que celles qui ont lieu dans l'hypothèse de Thomson.

Maintenant il se présente cette question: d'où vient le désaccord entre la théorie et l'observation? Evidemment la théorie, ou plutôt les principes sur lesquels est fondée cette théorie, sont fautifs. Il n'est pas difficile d'en trouver la raison. En effet dans la théorie proposée par Thomson et Mendeleyeff on fait deux suppositions: 1) dans l'atmosphère, dans laquelle la vapeur est loin d'être à l'état de saturation, la chaleur Q est constante, et par conséquent la relation bien connue entre la pression et la densité trouvée par Laplace, et ensuite confirmée par la théorie mécanique de la chaleur, doit avoir lieu pour l'atmosphère sans troubler son équilibre; 2) Lorsque toutes les couches atmosphériques sont saturées par la vapeur (cas bien rare et, pour les couches élevées, improbable) toute la vapeur passe à l'état liquide, et la chaleur qui s'en dégage ne s'anéantit pas en partie par la tendance de l'air à maintenir son état d'équilibre et elle ne sert qu'à augmenter la température de la couche. Cependant on doit se souvenir que la formule de Laplace mentionnée plus haut, n'est confirmée que pour le gaz en mouvement et pour les variations très rapides de sa densité; par conséquent l'équation de Poisson qui en dérive, n'a pas lieu pour l'état d'équilibre. Ainsi l'hypothèse que la quantité Q peut, dans certains cas, rester constante et ne varier autrement qu'à raison de la chaleur provenant d'une source étrangère,

gagnée par la liquéfaction de la vapeur d'eau, quoique physiquement possible, ne peut assurer l'équilibre de la couche aérienne. La répartition de la chaleur Q relative à chaque couche aérienne, lorsque toutes les couches doivent former un système en équilibre, ne peut pas être regardée comme arbitraire; elle doit suivre certaines lois que la mécanique rationnelle seule nous fera connaître.

La relation entre la densité d'une couche atmosphérique et sa température, que j'ai déduite à la page 63 de cet ouvrage, dépend de deux quantités constantes qui doivent être déterminées par l'observation de la température de l'air à la surface de la terre et de celle correspondant à la limite supérieure de l'atmosphère. Au lieu de cette dernière constante on peut se servir de la température observée à une couche suffisamment élevée dont la densité est connue en la déduisant de l'observation simultanée du baromètre. A l'aide de ces données, on calculera aisément la valeur de la température correspondant à la densité évanouissante. La relation dont il est question nous conduit aux conséquences suivantes: 1) Pendant l'hiver l'abaissement de la température est, en général, très petit, et il augmente à mesure que la température observée près de la surface de la terre devient plus élevée. 2) Pendant les chaleurs d'été, le décroissement des densités des couches aériennes, adjacentes à la surface de la terre, peut devenir très faible de sorte que la moindre force suffit pour troubler la stabilité de l'équilibre de ces couches, cas qui n'a lieu que rarement pendant l'hiver. 3) La variation de température dans une couche élevée de l'atmosphère se manifeste toujours par la variation relative beaucoup plus grande, ayant lieu dans les couches inférieures.

La relation trouvée entre la densité d'une couche atmosphérique et sa température, se trouve pleinement confirmée par les observations très variées, comme on peut s'en convaincre par l'inspection des résultats de comparaison consignés dans le numéro 6

de ce mémoire, et par cette raison je n'ai pas hésité à l'adopter pour base de la théorie nouvelle des réfractions. Les tables des réfractions qui en résultent sont données à la fin de ce mémoire; elles sont construites de telle façon qu'elles n'exigent aucun calcul logarithmique, sans nuire pourtant à leur exactitude. Pour la constante de la réfraction j'ai adopté la valeur donnée par Bessel dans ses tables regiomontaines, et pour la valeur du coefficient de la dilatation de l'air le nombre 0,003665.

La loi des densités des couches atmosphériques dont il est question, lorsqu'on l'applique à la formule hypsométrique, doit produire des changements assez notables dans cette formule; en effet elle donne naissance aux termes dépendant de la différence des températures observées dans les deux stations. Dans la formule de Laplace de tels termes n'existent pas. Après avoir appliqué la formule ainsi modifiée au calcul des quelques hauteurs dans lesquelles M. Glaisher a fait ses observations dans ses voyages aérostatiques, j'ai trouvé l'accord fort satisfaisant entre les résultats obtenus et ceux qu'on trouve lorsqu'on intercale plusieurs stations intermédiaires. L'existence des termes négatifs sensibles dépendant de la différence des températures, montre que le coefficient de Ramond, dans cette formule, doit être sensiblement augmenté.

SUR LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE.

1. En supposant toutes les couches de l'atmosphère, dans son état d'équilibre, ayant la même courbure, on démontre facilement que le produit de l'indice de réfraction de la couche, par sa distance au centre de courbure, et par le sinus de l'angle que la tangente à la trajectoire décrite par le rayon de lumière fait avec la normale, est une quantité constante. Si l'on désigne ces trois quantités, pour un point quelconque de la courbe en question, respectivement par μ, $a+h$, et θ', et pour l'origine de la courbe, où se trouve l'observateur, par μ_0, a et θ, on a,

$$\mu\,(a+h)\sin\theta' = \mu_0\, a \sin\theta.$$

Cette relation pourra servir à calculer l'une des quatre quantités μ, h, θ et θ' lorsqu'on aura déterminé trois d'entre elles par l'observation.

Soit dr la différentielle de la réfraction astronomique, ou l'angle de contingence de la courbe, la différence $\theta'-dr$ exprimera la valeur de l'angle de réfraction dans la couche dont l'indice de réfraction est $\mu+d\mu$ et correspondant à l'angle de l'incidence θ', on aura donc

$$\mu \sin\theta' = (\mu+d\mu)\sin(\theta'-dr),$$

d'où il résulte

$$dr = \frac{d\mu}{\mu}\,\mathrm{tg}\;\theta'.$$

En mettant, dans cette formule, la valeur de tg θ' tirée de la première équation, on trouvera l'expression de dr qui ne contiendra que les deux variables μ et h; la première d'entre elles est

censée varier entre les limites $\mu = 1$ et $\mu = \mu_0$ qui est plus grande que l'unité.

La quantité μ ne varie qu'avec la densité de la couche atmosphérique à condition que l'on y fait abstraction de la vapeur d'eau dont il est difficile de tenir compte, et dont l'influence directe sur la réfraction est toujours petite par rapport à son influence indirecte produisant les changements continuels de la loi de distribution de la chaleur dans l'atmosphère. En appelant ϱ_0 la densité de la couche inférieure et par ϱ celle de la couche qui se trouve à la hauteur h on a

$$\frac{\mu^2 - 1}{\mu_0^2 - 1} = \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

Si nous faisons, pour abréger,

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 - \omega$$

$$\frac{\mu_0^2 - 1}{2\,\mu^2_0} = \alpha,$$

nous aurons

$$\mu = \mu_0 \sqrt{1 - 2\alpha\omega}$$

Les quantités μ et ω varient dans le sens contraire: la quantité ω diminue de l'unité jusqu'à zéro, tandis que la quantité μ augmente de l'unité jusqu'à $\mu = \mu_0$. Si l'on suppose les limites de ω prises dans le sens invers et que l'on remarque que

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{\alpha\, d\,\omega}{1 - 2\,\alpha\,\omega},$$

on obtient

$$dr = \frac{\alpha\, d\,\omega}{1 - 2\,\alpha\,\omega} \operatorname{tg}\, \theta'.$$

On doit remplacer $\operatorname{tg}\, \theta'$ par sa valeur tirée de l'équation snivante:

$$(a + h) \sin \theta' \sqrt{1 - 2\,\alpha\,\omega} = a \sin \theta. \qquad (1)$$

Cette substitution étant faite, on trouve

$$dr = \frac{a\,\alpha \sin \theta\, d\,\omega}{(1 - 2\alpha\omega)\sqrt{(a + h)^2\,(1 - 2\,\alpha\,\omega) - a^2 \sin^2 \theta}}. \qquad (2)$$

Cette expression contient deux variables h et ω, la dernière variant entre les limites $\omega = 0$ et $\omega = 1$, d'où il suit que l'on doit connaître la relation entre la densité de la couche de l'air atmosphérique et sa distance à la surface du sphéroïde terrestre. Dès que l'on aura déterminé cette relation il ne se présentera aucune difficulté de calculer la réfraction cherchée. En effet l'intégrale de l'expression précédente prise entre les limites données fournira la valeur demandée de la réfraction r.

L'équation de la courbe que le rayon lumineux décrit dans l'atmosphère terrestre se déduit facilement. Concevons, pour ce but, dans le plan de la courbe en question, deux droites menées du centre de courbure du sphéroïde terrestre, l'une à un point quelconque de la courbe et l'autre aboutissant à l'origine de cette courbe. Soit c l'angle compris entre ces deux droites, désignons par ds la différentielle de la courbe, nous avons

$$ds \cos \theta' = dh$$
$$ds \sin \theta' = (a + h)\, dc,$$

d'où l'on tire

$$(a+h)\frac{dc}{dh} = tg\, \theta'. \qquad (3)$$

Si l'on y met la valeur de $tg\, \theta'$ donnée par l'équation (1) on obtient

$$(a+h)\frac{dc}{dh} = \frac{a \sin \theta}{\sqrt{(a+h)^2 (1 - 2\alpha\omega) - a^2 \sin^2 \theta}}. \qquad (4)$$

Cette équation, après avoir éliminé la quantité ω à l'aide de la relation supposée connue entre ω et h, sera l'équation différentielle de la courbe de la réfraction. En effectuant l'intégration nous obtiendrons la relation entre les deux variables h et c qui pourra servir à calculer la hauteur h, au moyen de la distance zénithale θ et de la distance ac de l'objet observé à l'observateur.

Soit R le rayon de courbure de la courbe de la réfraction, on a

$$\frac{1}{R} = \frac{dr}{ds};$$

en y mettant $\frac{a+h}{\sin \theta'} dc$, à la place de ds, nour aurons

$$\frac{1}{R} = \frac{dr}{dc} \cdot \frac{\sin \theta'}{a+h},$$

et, en vertu de la formule (1), nous trouvons

$$\frac{1}{R} = \frac{dr}{dc} \cdot \frac{a \sin \theta}{(a+h)^2 \sqrt{1 - 2\alpha\omega}}. \qquad (5)$$

Si l'on combine l'équation (3) avec la formule

$$dr = \frac{\alpha\, d\omega}{1 - 2\alpha\omega} \cdot \operatorname{tg} \theta'$$

on obtient

$$\frac{dr}{dc} = \frac{\alpha\, d\omega}{d\, h} \frac{a+h}{1 - 2\alpha\omega}, \qquad (6)$$

et la valeur du rayon de courbure R s'exprimera au moyen de deux variables h et ω.

La courbe décrite par le rayon de lumière sera tournée par son côté concave vers la surface de la terre, quand la quantité R est positive.

Toutes les théories de la réfraction astronomique donnent, pour $\frac{r}{c}$, la valeur positive et sensiblement constante pour de petites valeurs de l'angle c, ce qui aurait lieu si la quantité r pouvait être développée en série convergente suivant les puissances ascendantes de c. Dans ce cas la valeur du rapport $\frac{r}{c}$, qui joue un rôle important dans le nivellement géodésique, sera sensiblement égale à la quantité $\frac{dr}{dc}$, et se déterminera simplement à l'aide de la formule (6).

Dans le calcul des hauteurs h on se contente rarement de la mesure d'une distance zénithale θ, vu la difficulté d'évaluer exactement la réfraction respective. Si l'on veut atteindre plus d'exactitude dans la détermination de la différence de niveau de deux points on fait ordinairement des observations simultanées sur ces points. Soient θ et $180 - \theta'$ les distances zénithales observées, q et q' les

réfractions respectives, en sorte que $\theta+q$ et $180—\theta'+q'$ seront les distances zénithales vraies, on aura

$$\frac{a+h}{a}=\frac{\sin(\theta+q)}{\sin(\theta'-q')}$$

$$\theta-\theta'=c-q-q'$$

La réfraction totale r étant égale à la somme $q+q'$ se déduit de la dernière formule parce que l'angle c peut être calculé, avec l'exactitude suffisante, au moyen de la distance réciproque de deux points en question et de la valeur du rayon de courbure a correspondant à la station inférieure. On suppose que ces deux quantités soient connues. Si l'on fait, pour abréger,

$$s=2a\sin\frac{c}{2},$$

on a

$$h=\frac{s\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}+\frac{q-q'}{2}\right)}{\sin\left(\theta'-\frac{r}{2}+\frac{q-q'}{2}\right)}.$$

Si l'on était autorisé de supposer, d'accord avec les théories connues de la réfraction, les deux réfractions q et q' égales, on aurait simplement

$$h_1=\frac{s\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}{\sin\left(\theta'-\frac{r}{2}\right)}, \qquad (7)$$

et

$$h=h_1.$$

Mais cette supposition, même dans les occasions les plus favorables, n'a pas lieu; on commet donc l'erreur qui s'élève à

$$h-h_1=-s\cos\frac{c}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{q-q'}{2}\right)}{\sin\left(\theta'-\frac{r}{2}\right)\sin(\theta'-q)}$$

ou, à peu près, à la valeur suivante:

$$h-h_1=-s\frac{\sin\left(\frac{q-q'}{2}\right)}{\sin^2\left(\theta'-\frac{r}{2}\right)}. \qquad (8)$$

Lorsque la distance entre les deux points dont on cherche la différence de niveau n'est pas considérable, on peut négliger sans inconvénient cette erreur, en admettant que la quantité $q - q'$ disparaît dans les erreurs d'observation; mais dans tous les cas, où l'angle c surpasse dix minutes, la différence $q - q'$ peut devenir sensible, et on commet l'erreur qui, en général, augmente considérablement à mesure que la distance s devient plus grande.

Si l'atmosphère terrestre n'était composée que des couches concentriques de la même densité, ce qui suppose que dans chaque couche la température soit constante, on pourrait déterminer la valeur de la quantité $q - q'$ sans connaître la loi de la diminution de la densité des différentes couches atmosphériques. En effet l'équation (1) qui est entièrement indépendante de cette loi fournira la solution demandée. En écrivant cette équation comme il suit:

$$\frac{h}{a} = \frac{2 \sin \frac{c - r}{2} \cos \frac{\theta + \theta'}{2}}{\sin \theta'} + m \frac{\sin \theta}{\sin \theta'},$$

où, pour abréger, on a fait

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\omega}} - 1,$$

et en la divisant par la valeur de h_1 donnée par la formule (7) nous trouverons facilement l'expression suivante de la quantité $h - h_1$:

$$h - h_1 = -h_1 \frac{\sin \frac{\theta + \theta'}{2}}{\sin \theta'} \left\{ \frac{\sin \frac{r}{2}}{\sin \frac{c}{2}} - m \frac{a}{h_1} \frac{\sin \theta'}{\sin \frac{\theta + \theta'}{2}} \right\};$$

mais, en remarquant que les angles θ et θ' diffèrent généralement peu de 90°, nous pouvons, avec l'approximation suffisante, remplacer la formule précédente par celle-ci

$$h - h_1 = -h_1 \left\{ \frac{r}{c} - m \frac{a}{h_1} \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\theta + \theta'}{2}} \right\}. \qquad (9)$$

En comparant cette formule avec la formule (8) on trouve

$$\frac{q-q'}{2}=\frac{h_1}{s}\left\{\frac{r}{c}-m\frac{a}{h_1}\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta+\theta'}{2}}\right\}. \qquad (10)$$

Si les conditions d'équilibre de l'atmosphère terrestre mentionnées plus haut ont lieu, ce qui peut arriver quand les deux points d'observation sont isolés et assez élevés, l'équation précédente combinée avec celle—ci

$$\theta-\theta'=c-r$$

donnera la valeur cherchée de la différence $q-q'$. En effet les instruments météorologiques observés simultanément dans les deux stations fourniront, pour calculer ω, les données suffisamment approchées. Mais il faut remarquer que dans les couches intermédiaires peuvent se passer des changements, soit dans la pression, soit dans la distribution de la chaleur, qui, sans être accusés par les observations directes faites dans les deux stations, dérangeront l'équilibre de ces couches et par cela même ils rendront la détermination de la quantité $q-q'$ incertaine et souvent défectueuse.

2. La détermination de la réfraction totale produite par toute l'atmosphère, ou d'une partie de la réfraction totale produite par les couches inférieures s'effectuera aisément, dès que l'on sera parvenu à déterminer la relation entre les deux variables h et ω. D'après la loi de Gay-Lussac et de Mariotte la densité de la couche ϱ, la pression p à laquelle elle est sujette et la température t de cette couche sont liées par la formule:

$$p=l\varrho(1+\beta t), \qquad (11)$$

où β est le coefficient de la dilatation de l'air, et l désigne la quantité constante déterminée par l'expérience physique. D'après les expériences de M. Regnault, la pression, par mètre carré de l'air à la température de la glace fondante et à 760 millimètres de la colonne barométrique est égale à 10333 kilogrammes, 1,2932 kilogrammes étant le poids du mètre cube de l'air. Au moyen de ces valeurs on trouve $l=7990$. Ramond, par la comparaison des

hauteurs trouvées par les mesures trigonométriques avec celles calculées à l'aide de la formule barométrique de Laplace, est arrivé au résultat $l = 7963$. Cette dernière valeur de la constante l fut adoptée par Bessel et par tous ceux qui se sont occupés de la théorie de la réfraction astronomique. La différence de deux valeurs de l, obtenues à l'aide de deux méthodes qui sont indépendantes l'une de l'autre, est très sensible; il est pourtant facile de démontrer que la constante de la formule barométrique donnera, pour l, la valeur plus grande que 7963, et qui s'approchera beaucoup du résultat de M. Regnault, lorsqu'on tiendra compte de quelques corrections qu'on doit appliquer à la formule de Laplace pour la rendre plus exacte.

La pression que l'air atmosphérique exerce sur la colonne barométrique est la somme des pressions partielles exercées par les différentes couches de l'air contenues dans le cône ayant son sommet au centre de la terre, et sa base, prise pour l'unité, à la surface de la terre. Une couche quelconque de l'air atmosphérique qui se trouve à la hauteur h aura, pour base, la valeur $(\frac{a+h}{a})^2$. En multipliant cette quantité par dh et par le produit de la densité ϱ et de la gravité g, toutes les deux correspondant à la même hauteur h, nous obtiendrons l'expression suivante de la différentielle de la pression:

$$dp = -g\varrho\,(\frac{a+h}{a})^2\,dh.$$

Mais, en négligeant la variation de la force centrifuge avec la hauteur, le produit $g(a+h)^2$ devient constant et égal à la quantité $g_0 a^2$, où g_0 désigne la gravité à la surface de la terre, par conséquent on a:

$$dp = -g_0\varrho\,dh. \qquad (12)$$

Soit t_0 la température de l'air au lieu de l'observation de la distance zénithale θ; en faisant, pour abréger,

$$z = \frac{1+\beta t}{1+\beta t_0}$$

$$i = \frac{l}{a g_0}(1+\beta t_0),$$

on parviendra, par l'élimination de la quantité p des équations (11) et (12), à la valeur suivante du rapport $\frac{a}{h}$:

$$\frac{h}{a} = i\left\{ -\log(1-\omega) + 1 - z - \int \frac{1-z}{1-\omega} \cdot d\omega \right\}. \qquad (13)$$

On se servira de cette formule, pour déterminer la valeur de h en fonction de la variable ω, lorsqu'on aura la valeur de la quantité z en fonction de la même variable. Dans l'évaluation de l'intégrale qui entre dans le second membre de la dernière formule on aura soin de déterminer la constante arbitraire de manière que cette intégrale s'évanouisse pour $\omega = 0$.

Dans l'hypothèse de la température constante dans toute l'atmosphère on a $z = 1$, et la densité ϱ s'exprime à l'aide de la formule suivante:

$$\varrho = \varrho_0 \, e^{-\frac{h}{ia}}$$

qui montre que la densité ϱ ne devient nulle qu'à la distance infinie de la couche atmosphérique. Il est aisé de voir qu'on arrivera à la même conclusion, quelque soit la fonction z, pourvu qu'elle ne devienne nulle à la limite supérieure de l'atmosphère. Nous verrons dans la suite qu'il est peu probable que la fonction z puisse s'annuler à la limite extrême de l'atmosphère terrestre, donc il est impossible de trouver, à l'aide des formules (11) et (12), la valeur finie de la hauteur de l'atmosphère. Evidemment la loi de Gay-Lussac et de Mariotte, que nous avons supposée exacte dans ce qui précède, doit subir quelques modifications dès que la force élastique de l'air approche de sa valeur évanouissante (1).

(1) M. Maxwell Hall, of Pembroke college, Cambridge (Phil. Mag. Mai 1871) jugeait possible de trouver la hauteur finie de l'atmosphère terrestre en supposant la température partout constante. L'inexactitude de la formule généralement employée et qui exprime l'équilibre du fluide élastique assujetti à la force de gravité l'a conduit à cette conclusion paradoxale. Du reste, en faisant abstraction de ce ci, l'analyse subséquente de M. Maxwell Hall n'est pas exempte d'erreurs. En partant du principe que le poids de l'atmosphère réelle doit être égal au poids

Dans les traités de mécanique la formule (12) est sensiblement modifiée: elle est présentée sous la forme

$$dp = - g_0 \varrho \left(\frac{a}{a+h}\right)^2 dh,$$

que l'on transforme, en y faisant

$$\frac{a}{a+h} = 1 - s,$$

en celle—ci

$$dp = - g_0 \varrho \, a \, d \, s.$$

Il est facile de voir que cette formule est inexacte; en effet en la divisant par

$$p = l \varrho (1 + \beta t) = i g_0 a \varrho z.$$

et en effectuant l'intégration on trouve

$$p = p_0 e^{-\frac{s}{i} - u}$$

où p_0 désigne la pression dans le lieu où la hauteur $h = 0$, et la quantité u est la valeur de l'intégrale

$$u = \int \left(\frac{1}{z} - 1\right) \frac{ds}{i}.$$

La valeur de la pression p qu'on vient de trouver est inexacte; en effet, quand la hauteur h de la couche varie depuis zéro jusqu'à l'infini, la quantité s reste néanmoins finie, et ne varie qu'entre les limites zéro et l'unité, par conséquent dans l'atmosphère terrestre, dans laquelle la quantité u, dans les limites $s = 0$ et $s = 1$, reste finie et généralement assez petite, la pression pour la limite supérieure, ne se réduit pas à zéro.

3. Le problème du nivellement barométrique est intimement lié à la théorie de la réfraction astronomique; l'un et l'autre

---

de la couche ayant la hauteur égale à 7990 mètres et la densité constante, il néglige, dans l'expression de ce poids, la variation de la gravité due à la variation de la hauteur ce qu'il ne fait pas pour le premier poids; par cette raison l'équation (6) de M. Maxwell Hall se trouve erronée. Ensuite il développe une fonction en une série infinie dont il ne retient que les deux premiers termes, sans s'assurer de la convergence de cette série.

dépendent de la connaissance parfaite de la loi de la densité des couches atmosphériques ce qui, de son côté, exige que l'on connaisse le rapport dans lequel diminue la température de l'air, lorsque la hauteur de la couche augmente. Laplace ayant, pour but, la simplicité de la formule barométrique, admet que le rapport de la variation du carré de la quantité $1+\beta t$ à celle de la hauteur h reste constant. Cette relation est sensiblement éloignée de la vérité. Les observations bien connues de M. Glaisher (1) montrent que l'abaissement de la température de l'air, lorsque l'atmosphère est dégagée de nuages, est particulièrement très grand, près de la surface de la terre, et qu'il devient plus faible à mesure que l'on s'élève à de grandes hauteurs. Si l'on représente par les coordonnées x les hauteurs et par les coordonnées y les abaissements respectifs de la température dans les différentes couches de l'air atmosphérique, et que l'on construise la courbe des températures en s'aidant des nombres donnés par M. Glaisher (2), nous verrons que cette courbe est concave vers l'axe x et, à l'origine des coordonnées, d'une concavité très prononcée, tandis que la courbe relative à l'hypothèse de Laplace est convexe vers le même axe.

Dans le paragraphe 6 de ce mémoire nous déduirons la loi de la variation de la température dans l'atmosphère en la supposant exempte de l'influence perturbatrice produite par différentes causes, et principalement par la présence de la vapeur d'eau. Nous y montrerons que cette loi, dans une telle atmosphère, s'exprime à l'aide de la formule suivante:

$$z = \frac{1}{1+k\omega^{\frac{1}{\gamma}}}, \qquad (14)$$

dans laquelle la quantité γ désigne le rapport de la capacité calorique à pression constante à celle à volume constant, et la quan-

(1) The report of the British association for the advancement of sciences 1862, 1863, 1864.

(2) Ibidem. 1864 p. 277.

tité k est une variable, mais elle ne varie qu'avec la température de l'air observée à la surface de la terre. Lorsque l'atmosphère est chargée de nuages, la température de ses différentes couches est sujette à des irrégularités si grandes qu'il faut entièrement renoncer à la possibilité d'arriver à une conclusion tant soit peu satisfaisante sur la forme de la fonction z.

L'application de la formule précédente à la déduction de la formule barométrique conduit à l'expression compliquée, et par cela même, peu utile dans la pratique. Pour éviter cette complication, nous remplaçons cette formule par la suivante:

$$z = \frac{1}{1 + N h^{\frac{1}{\gamma}}},$$

qui, en général, exprime la loi observée des températures avec beaucoup d'approximation. La quantité γ est égale à 1,4; mais en faisant usage de la dernière formule on approchera plus de la vérité en y adoptant $\gamma = 1{,}5$.

Si l'on met la valeur précédente de z dans la formule (12) en y éliminant ϱ à l'aide de la formule (11) on arrive facilement à la valeur suivante de la hauteur h:

$$h = \frac{l}{g_0}(1 + \beta t_0)\left\{\frac{1+z}{2} - \frac{1}{10}(1-z) - \frac{24}{100}(1-z)^2 - \frac{12}{125}(1-z)^3 - \cdots\right\}\log\frac{p_0}{p}. \quad (15)$$

Soient: b l'indication du baromètre supérieur, b_0 celle du baromètre inférieur; en supposant que b et b_0 soient réduits à la température zéro du mercure on a

$$\frac{p_0}{p} = \frac{b_0}{b}\frac{g_0}{g}.$$

S'il s'agit de déterminer l'élévation, à l'aide du baromètre, de l'observateur dans son voyage aérostatique, on devra prendre, pour le rapport de deux gravités g_0 et g, la valeur

$$\frac{g_0}{g} = (1 + \frac{h}{a})^2,$$

ou, approximativement,

$$\frac{g_0}{g} = 1 + 2\frac{h}{a}.$$

Mais lorsque les observations barométriques ont pour but la mesure de l'élévation d'une montagne on doit faire attention à ce que le rapport mentionné plus haut s'exprime, dans ce cas, par la formule

$$\frac{g_0}{g} = 1 + 2\frac{h}{a}\left(1 - \frac{3}{4}\delta\right),$$

où δ désigne la densité de la montagne, la densité moyenne de la terre étant prise pour unité. Ce résultat trouvé par Poisson, dans la supposition que le terrain soit horizontal et indéfini, a lieu aussi dans le cas, où il s'agit d'un cône isolé dont la pente est inclinée sur l'horizon sous l'angle φ. Dans ce dernier cas il faut multiplier la quantité δ par $1 - \sin\varphi$; mais l'angle φ étant ordinairement très petit on peut négliger $\sin\varphi$. En prenant $\delta = \frac{1}{2}$ on parvient à la valeur

$$\frac{g_0}{g} = 1 + \frac{5}{4}\frac{h}{a},$$

par conséquent

$$\log\frac{p_0}{p} = \log\frac{b_0}{b} + \log\left(1 + \frac{5}{4}\frac{h}{a}\right),$$

ou, avec l'approximation suffisante,

$$\log\frac{p_0}{p} = \log\frac{b_0}{b} + \frac{5}{4}\frac{h}{a}.$$

Le dernier terme de cette formule étant très petit par rapport au premier, on peut mettre, à sa place, la valeur approchée qui suit:

$$\frac{5}{4}\frac{h}{a} = \frac{5}{4}\frac{l}{a}\log\frac{b_0}{b},$$

par conséquent on a

$$\log\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{5}{4}\frac{l}{a}\right)\log\frac{b_0}{b}.$$

Si l'on met cette valeur dans la formule (15) et qu'on fasse, pour abréger,

$$C = l\left(1 + \frac{5}{4}\frac{l}{a}\right),$$

on trouve définitivement

$$h = \frac{C}{g_0}\left\{1 + \beta\left(\frac{t+t_0}{2}\right) - \frac{1}{10}\beta(t_0 - t) - \frac{24}{100}\frac{\beta^2(t_0-t)^2}{1+\beta\frac{t+t}{2}} - \cdots\right\}\log\frac{b_0}{b}. \quad (16)$$

La formule de Laplace, si l'on y effectue la transformation de la valeur de $\log\frac{p_0}{p}$ que nous avons précédemment appliquée, s'écrit comme il suit:

$$h = \frac{C'}{g_0}\left\{1 + \beta\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\}\log\frac{b_0}{b},$$

où

$$C' = l\left(1 + 2\frac{l}{a}\right)\left(1 + \frac{h}{a}\right),$$

et il est évident qu'en faisant abstraction de la constante de la formule barométrique, cette dernière formule ne diffère de la formule (16) que par les termes qui dépendent de la différence des températures. A la vérité, ces derniers termes sont, en général, très petits; mais quand il s'agit de calculer de grandes élévations ils ne sont pas négligeables, comme nous verrons ci-après. L'omission du terme $-\frac{\beta}{10}(t_0 - t)$, le plus considérable, produit l'erreur, dans h, s'élevant à $-\frac{1}{10}h\beta t_0 - t$, ce qui doit, de son côté, réagir sur la valeur de la constante l tirée de la formule de Laplace en la rendant trop faible.

Ramond, en comparant les hauteurs géodésiques avec celles déterminées par la formule de Laplace, et en faisant usage de la valeur $\beta = 0{,}004$ du coefficient de la dilatation de l'air atmosphérique fut conduit à la valeur $C' = 18393$ mètres lorsqu'on se sert des logarithmes ordinaires; il en conclut, pour l, la valeur 18336 mètres. En faisant usage des logarithmes néperiens on aura $C' = 7988{,}0$ et $l = 7963{,}2$. Nous avons remarqué dans le paragraphe précédent que le facteur $1 + \frac{h}{a}$ ne doit pas avoir lieu dans la formule barométrique; nous avons fait observer précédemment que le coefficient

numérique 2, dans l'expression de C, doit être remplacé par $\frac{5}{4}$, il suit donc que la valeur de la constante l, en supposant la valeur de $C'=7988,0$ de Ramond exacte, devra être déduite de la formule

$$7988,0 = l\,(1+\frac{5}{4}\frac{l}{a}),$$

pourvu qu'il ne puisse y exister aucun doute sur la valeur de β adoptée par Laplace. Les considérations qui conduisirent Laplace à adopter la valeur $\beta=0,004$ pouvaient être alors plausibles, mais actuellement nous savons que le coefficient de la dilatation de l'air atmosphérique, même saturé de la vapeur d'eau, tout en étant un peu plus fort que celui de l'air sec, n'en diffère néanmoins que d'une quantité minime. Si l'on prend, dans le cas d'extrême humidité de l'air, $\beta=0,00369$ on trouve que la constante C' doit être augmentée de la quantité $2,48\,\frac{t_0+t}{2}$, ou, en d'autres termes, la constante l doit être calculée à l'aide de la formule

$$7988,0 = l\,(1+\frac{5}{4}\frac{l}{a}) - 2,48\,\frac{t_0+t}{2},$$

ou, par celle-ci:

$$l = 7975,5 + 2,48\,\frac{t_0+t}{2}.$$

Les mémoires de Ramond ne contiennent aucune indication précise sur la valeur moyenne de la température qui correspond à toutes les observations qu'il a prises en considération, il est donc impossible d'évaluer exactement l'effet de cette correction; mais il est certain que cette moyenne était positive et dépassait dix degrés. En effet les observations qui sont consignées dans le premier mémoire de Ramond et qui servirent à la détermination de la constante l se rapportent presque toutes à des températures élevées.

Une nouvelle détermination de la constante dans la formule barométrique, par les raisons qu'on vient d'exposer, devient nécessaire, et il est très probable qu'on obtiendra, pour cette constante, une valeur qui dépassera même le nombre 8000. En la tirant des

observations de M. Chodzko faites pendant l'ascension du Grand-Ararat en 1858, et dont nous parlerons dans le paragraphe 6 de ce mémoire, nous avons trouvé $C=8193$ quand on se sert de la formule (16); la formule de Laplace appliquée à ces observations, mais avec le coefficient $\beta=0{,}003665$ conduit à la valeur $C=8083$.

Quant à la valeur de la constante l il est visible, par ce que nous avons dit précédemment que le nombre 7965 adopté par Bessel et par d'autres dans la théorie de la réfraction astronomique, est trop faible. Nous ne nous éloignerons pas beaucoup de la vérité en adoptant $l=8000$. Du reste l'erreur qui peut s'élever à quelques unités de cette valeur sera sans importance pour les réfractions.

La loi des températures dans l'atmosphère adoptée par nous, lorsqu'on l'applique à la formule barométrique, donne naissance aux termes qui dépendent de la différence des températures. Cette forme particulière de la formule barométrique (15) ne se présente pas en se servant d'autres formes de la fonction z qui ont été adoptées dans les différentes théories de la réfraction astronomique. Les termes en question sont, en général, très petits lorsque l'élévation à mesurer n'est pas considérable; mais dans le cas contraire ils ne sont pas à négliger. Pour montrer l'avantage que l'on tire de la formule (15) quand il s'agit de calculer de grandes hauteurs d'après les observations barométriques faites dans des occasions favorables nous exposerons ici le résultat du calcul de deux ascensions aérostatiques de M. Glaisher. En 1862 le 17 Juillet, M. Glaisher s'éleva à la hauteur 26039 pieds anglais, comme il résulte de la formule de Laplace. Pour cette ascension les observations du baromètre donnèrent $b=11{,}143$, $b_0=29{,}193$ et celles du thermomètre de Fahrenheit donnèrent $t=16{,}0$ et $t_0=59{,}0$. Dans la même année, le 5 Septembre, M. Glaisher s'éleva jusqu'à la hauteur 37427 p. a. et pour cette ascension on a $b=7{,}00$, $b_0=29{,}40$, $t=-12{,}0$, $t_0=59{,}5$. Les hauteurs 26039 et 37427 sont déduites de la formule de Laplace avec la valeur $\beta=0{,}003665$ du coefficient de la dilatation de l'air; leur exactitude dépend donc de la valeur adoptée de la constante C et de la loi de distribution de la chaleur dans

l'atmosphère. Il est évident qu'en faisant abstraction de la valeur de C', la formule de Laplace sera exempte de l'erreur qui dépend de l'inexactitude de la fonction z y adoptée lorsqu'on partage toute la hauteur en très petites parties, et qu'ensuite on en prend la somme. Les ascensions aérostatiques de M. Glaisher se prêtent bien à ce moyen de calculer la hauteur totale parce qu'il a observé le baromètre et le thermomètre dans les intervalles très petits du temps, durant lequel la hauteur ne varia que peu. Ce moyen bien simple, et fort peu dépendant de l'hypothèse sur la fonction z, fut employé, la première fois, par M. A. Ellis (1), et en l'appliquant au calcul des ascensions aérostatiques de M. Glaisher, mentionnées plus haut, M. Ellis trouva respectivement les hauteurs 25688 et 36659, tandis que le calcul direct de la hauteur totale, sans y faire concourir les observations intermédiaires, donnèrent 26039 et 37427. Donc les différences 351 et 768 sont dues à l'inexactitude de la fonction z adoptée par Laplace. Voyons maintenant quel résultat on obtiendra lorsqu'on appliquera la formule (15) pour le calcul direct de la hauteur totale, sans faire usage des observations intermédiaires. Soient, pour ce but, h_0 la hauteur trouvée par la formule de Laplace, h la hauteur tirée de la formule (15), on a

$$h=h_0-\frac{1}{10}h_0\frac{\beta(t_0-t)}{1+\beta\tau}-\frac{24}{100}h_0\left(\frac{\beta(t_0-t)^2}{1+\beta\tau}\right)-\frac{96}{1000}h_0\left(\frac{\beta(t_0-t)^3}{1+\beta\tau}\right)-\ldots$$

où, pour abréger la formule, nous avons mis

$$\tau=\frac{t_0+t}{2}.$$

En mettant dans cette formule les valeurs: $\beta=0{,}002036$, $t=16{,}0$ $t_0=59{,}0$, $h_0=26039$, correspondantes à la première observation, et $t=-12{,}0$, $t_0=59{,}5$, $h_0=37427$ relatives à la seconde, on trouve les hauteurs suivantes auxquelles s'éleva M. Glaisher dans les deux ascensions aérostatiques du 17 Juillet et du 5 Septembre:

$$h=25765 \text{ et } h=36664.$$

(1) Proceedings of the royal society. Vol. 14, № 75.

M. Ellis, comme il est dit plus haut, a trouvé respectivement pour ces deux ascensions

$$h = 25688 \text{ et } h = 36659,$$

ainsi l'erreur de la formule (15), et par conséquent de la formule (16), dérivant de la loi adoptée des températures, s'élève à 77 p. a. pour la première observation et elle ne s'élève qu'à 5 p. a. pour la seconde. Il est donc à espérer que la formule (16) se comporterait suffisamment bien dans les occasions favorables, où il n'y aurait pas à craindre que l'atmosphère terrestre ne soit troublée dans son état d'équilibre.

4. Aucune partie des sciences physiques n'a été traitée autant de fois que la réfraction astronomique. Son importance pour la pratique, et l'intérêt même de la question, suffisent pour expliquer cette abondance de recherches sur cette matière. On devait donc s'attendre à ce que ces recherches n'avaient rien laissé à désirer. Différentes théories de la réfraction astronomique sont basées sur des hypothèses qui donnent, avec plus ou moins d'approximation, la loi du décroissement de la température dans l'atmosphère; les unes supposent z exprimé en fonction de la hauteur de la couche atmosphérique, et les autres donnent z en fonction de la densité; mais toutes ces hypothèses sont choisies de telle sorte que la quantité z devienne toujours développable en série convergente procédant suivant les puissances de la hauteur h de la couche. En écrivant cette série comme il suit:

$$z = 1 + A\,h + B\,h^2 + \ldots$$

et en remarquant que l'influence de l'inégalité de la température dans l'atmosphère, ou l'ensemble des termes $A\,h + B\,h^2 + \ldots$ sur la réfraction horizontale ne s'élève qu'à trois, ou à quatre minutes, et que l'influence des termes du second ordre de h et des ordres supérieurs ne produise que trois ou quatre secondes, nous en devons conclure, en supposant toutefois que la loi de la nature conduise effectivement à une telle série, qu'il est presque indifférent, pour l'exactitude des réfractions calculées, de connaître la vraie fonction z; et

chaque expression empirique de z qui fournit une telle série conduira aux mêmes résultats. En effet la valeur du coefficient A, c'est à dire du terme principal, restera la même quelque soit la fonction z, parce que ce coefficient étant égal à $\frac{dz}{dh}$, quand h devient nul, sera toujours déterminé exactement à l'aide du décroissement de la température qui a lieu près de la surface de la terre. Ainsi en passant d'une hypothèse à une autre sur la forme de la fonction z, on ne fera que varier la valeur du coefficient B ce qui, en général, ne produira que des changements très petits dans la valeur des réfractions astronomiques. Les influences perturbatrices causées par l'échauffement irrégulier des couches inférieures de l'atmosphère, soit par la précipitation de la vapeur d'eau, soit par d'autres causes locales, sans toucher à la forme de la fonction z, ne tendront qu'à faire diminuer la valeur du coefficient A, ce qui, de son côté, ne produira qu'une augmentation de la réfraction.

L'existence de la série précédente se caractérise par certaines propriétés de la courbe de la réfraction. En effet cette courbe ne doit pas présenter de points d'inflection; sa partie adjacente à l'observateur restera toujours tournée par sa concavité vers la surface de la terre; ce n'est que le rayon de courbure de cette partie qui peut faiblement varier, lors même que la valeur du coefficient A varie sensiblement. Ainsi donc dès que l'on suppose que la fonction z peut être développée en série convergente ordonnée suivant les puissances de la hauteur de la couche, on doit s'attendre à des conséquences très simples par rapport à la valeur et aux variations possibles de la réfraction, et l'observation, dans ce cas, ne doit pas présenter les irrégularités qu'on a effectivement constatées. Le calcul des réfractions, ou l'intégration de la formule (2) s'effectuera, dans ce cas, d'une manière très simple. En effet, en posant, pour abréger,

$$\frac{g_0}{1+\beta t_0} \cdot \frac{h}{l} = x$$

$$\int \frac{dx}{s} = u,$$

on trouvera aisément

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 - \omega = \frac{1}{z} e^{-u}.$$

Mais, d'après l'hypothèse, on a la série

$$\frac{1}{z} = 1 + px + qx^2 + \cdots,$$

dans laquelle les coefficients numériques $p, q\ldots$ doivent diminuer progressivement; comme la valeur du coefficient p ne dépasse pas une sixième, on pourra donc présenter la valeur de la quantité $1-\omega$ en fonction de x, comme il suit:

$$1 - \omega = Q e^{-x},$$

où

$$Q = 1 + p\left(x - \frac{x^2}{2}\right) + q\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) + p^2\left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{2}\right) + \cdots$$

De l'autre côté l'expression (2) de la différentielle de la réfraction, en y faisant les réductions usitées, se transforme en celle-ci

$$dr = \frac{\alpha \sin\theta \, d\omega}{\sqrt{i}\sqrt{b^2 + x - \frac{\alpha}{i}\omega}};$$

où, pour abréger la formule, on a posé

$$i = \frac{l}{a g_0}(1 + \beta t_0),$$

$$b = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\,i}}.$$

Si nous y introduisons maintenant la valeur de ω donnée par la formule

$$\omega = 1 - Q e^{-x}$$

et que nous développions le radical contenu dans dr suivant les puissances ascendantes du rapport $\frac{\alpha}{i}$, en nous arrêtant à la quatrième puissance, ce qui est plus que suffisant, nous trouverons à intégrer les termes dont la forme générale sera

$$\frac{(-1)^n}{m^n} \int_0^\infty \frac{x^n e^{-x} dx}{\sqrt{b^2 + \frac{x}{m}}}.$$

Cette intégrale se réduit facilement à la valeur suivante, dans laquelle on doit rejeter les termes avec les exposants négatifs de b:

$$\frac{(-1)^n}{m^n}\int_0^\infty \frac{x^n e^{-x}\,dx}{\sqrt{b^2+\frac{x}{m}}} = -b^{2n-1} + \frac{n+1}{2}\frac{b^{2n-3}}{m}$$

$$-\frac{(3n^2-n+6)}{8}\frac{b^{2n-5}}{m^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n-1}}\frac{b}{m^{n-1}}$$

$$+\left\{b^{2n} - \frac{n}{1}\frac{b^{2n-2}}{2m} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot\frac{3.1}{(2m)^2}b^{2n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{5.3.1}{(2m)^3}b^{2n-6} + \cdots\right\} H_m,$$

où H_m désigne la transcendante

$$H_m = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{b^2+\frac{x}{m}}} = 2\sqrt{m}\; e^{mb^2}\int_{b\sqrt{m}}^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

dont la valeur peut être tirée des tables respectives. En effectuant tous les développements indiqués on arrivera à l'expression de r qui sera composée de deux parties: l'une contiendra les termes, en nombre fini, dépendant de différentes puissances de la quantité b, et l'autre formera une série finie où entrera, outre la quantité b, la transcendante H_m ayant les différentes indices m.

La formule, pour r, ainsi obtenue, peut être regardée comme une expression générale de la réfraction, dans le cas, où l'on suppose z la fonction en x pouvant être développée en série convergente procédant suivant les puissances de la hauteur de la couche atmosphérique. Les théories qui sont basées sur une telle fonction z sont nombreuses; elles ne diffèrent entre elles que par la manière de calculer la valeur d'un seul paramètre dont on fait dépendre ordinairement cette fonction.

Parmi les différentes théories de la réfraction astronomique qui ont paru dans ce siècle on remarque une certaine prédilection pour la fonction

$$\frac{1}{z} = (1+\eta\frac{x}{n})^n$$

dans laquelle on avait adopté, pour n, différents nombres entiers. Mais le développement de cette fonction donne la série

$$\frac{1}{z} = 1+\eta x + \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\eta^2 x^2 + \cdots$$

par conséquent on a

$$p=\eta\ ,\ q=\frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\eta^2\ ,$$

d'où il résulte que la quantité p ne changera pas en variant l'hypothèse sur le nombre n; c'est la quantité q qui en sera affectée.

Si les auteurs qui ont adopté cette fonction pour base de leur théorie se dirigeaient, dans le choix de la valeur de n, par le fait bien constaté depuis longtemps, que le décroissement de la température dans les régions supérieures de l'atmosphère est considérablement plus faible que celui qui correspond aux couches inférieures, ils devraient, pour ce but, choisir le nombre n de manière que cette condition fût remplie. Or il ne se présente aucune difficulté pour trouver que la valeur $n=1$ correspond à cette condition. Cette valeur $n=1$ conduit, en même temps, à la valeur la plus simple de la fonction Q en donnant

$$Q=1+\eta\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\eta^2\left(\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{2}\right)+\cdots$$

Nous ne poursuivons pas plus loin l'analyse de la réfraction astronomique correspondante à l'hypothèse de la distribution de la chaleur dans l'atmosphère terrestre qui s'exprime par la formule

$$\frac{1}{z}=1+p\,x+q\,x^2+\cdots$$

par la raison que cette hypothèse doit être regardée comme la moins probable; elle conduit à la conclusion que la température relative à la limite extrême de l'atmosphère doit approcher du zéro absolu ce qui est regardé par la plupart des physiciens comme inadmissible.

Les théories de la réfraction dans lesquelles la quantité z est exprimée en fonction de la diminution de la densité de l'air, c'est-à-dire en fonction de la variable ω, sont peu nombreuses; nous n'en connaissons que deux: celle de Laplace et celle de Ivory. De telles théories sont d'autant plus dignes d'attention que la quantité z, en supposant qu'elle puisse être développée en série convergente

$$z=1-f\omega+f'\omega^2-\cdots$$

dans laquelle ω ne varie qu'entre les limites zéro et unité, ne présente pas l'inconvénient de disparaître pour la limite extrême de l'atmosphère, et que cette série, même réduite à son premier terme, approche déjà beaucoup de la loi observée du décroissement de la température; il est donc évident, qu'en tenant compte des termes des ordres supérieurs de ω, on en approchera davantage. Quoique à la vérité, en adoptant cette série, on ne parvienne pas à aplanir complètement les difficultés que présente la réfraction observée près de l'horizon et la réfraction terreste, nous pensons néanmoins que, dans la plupart des cas, et particulièrement quand on fait abstraction des réfractions observées très près de l'horizon, on pourrait construire de bonnes tables des réfractions. La variabilité du paramètre f, qui a lieu pour les différentes températures observées à la surface de la terre, pourra être évaluée, ou d'après les observations respectives, ou, ce qui sera plus expéditif, par la comparaison des valeurs particulières de la quantité z que l'on tirera de la série précédente avec celles que l'on déduira de la formule relative à laquelle nous sommes conduits par la théorie exposée dans le paragraphe 6 de ce mémoire.

L'hypothèse exprimée par la série donnée ci-dessus conduit à l'expression la plus simple de la réfraction astronomique ce qui constitue un des avantages de cette série; c'est par cette raison que nous exposerons les formules nécessaires pour calculer cette réfraction.

En mettant la valeur précédente de z dans la formule (13) on trouve

$$\frac{h}{a} = i\left\{-(1-f+f')\log(1-\omega)+(2f-f')\omega+\frac{3}{2}f'\omega^2\right\},$$

par conséquent, en faisant, pour abréger

$$\begin{aligned} J &= i\,(1-f+f') \\ b &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{2J}} \\ p &= \frac{\alpha}{J} - \frac{2f-f'}{1-f+f'} \\ q &= \frac{3}{2}\frac{f'}{1-f+f'} \end{aligned} \qquad (17)$$

et en désignant $-\log(1-\omega)$ par x, on obtient

$$dr = \frac{\alpha}{\sqrt{2J}} \frac{\sin\theta . e^{-x} dx}{\sqrt{b^2+x-p(1-e^{-x})+q(1-e^{-x})^2}} .$$

Si l'on applique les méthodes connues à la réduction de cette intégrale, on trouve facilement l'expression suivante de la réfraction r:

$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{2J}} \sin\theta . \Sigma(m+n+1)^{m-1} \frac{(p-2q)^{m-n}}{\Pi(m-n)} \frac{q^n}{\Pi(n)} e^{-(m+n+1)(p-q)} H_{m+n+1}$$

où le signe Σ désigne la somme qui s'étend à tous les nombres n et $m-n$ entiers et positifs depuis zéro jusqu'à l'infini, et les signes $\Pi(n)$ et H_n désignent les fonctions

$$\Pi(n) = 1.2.3...n$$

$$H_n = 2\sqrt{n}\, e^{nb^2} \int_{b\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Les premiers termes de la valeur r s'écrivent comme il suit:

$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{2J}} \sin\theta \left\{ e^{-(p-q)} H_1 + (p-2q) e^{-2(p-q)} H_2 + \left[\frac{3}{2}(p-2q)^2 + q \right] e^{-3(p-q)} H_3 + \left[\frac{8}{3}(p-2q)^3 + 4(p-2q)q \right] e^{-4(p-q)} H_4 + \cdots \right\} \quad (18)$$

L'hypothèse sur la fonction z qui sert de base à l'expression précédente de la réfraction astronomique donne la valeur $1-f+f'$ pour la quantité z relative à la limite supérieure de l'atmosphère, et les coefficients f, f'... doivent former une suite sensiblement décroissante pour que leur somme converge vers une quantité finie comprise entre les limites zéro et unité.

L'hypothèse de Ivory, ou la fonction

$$z = 1 - f\omega ,$$

conduit à l'expression suivante de la réfraction:

$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{2J}} \sin\theta \left\{ H_1 e^{-p} + pH_2 e^{-2p} + \frac{3}{2} p^2 H_3 e^{-3p} + \frac{8}{3} H_4 e^{-4p} + \ldots \right\}$$

et les quantités J, p ont les valeurs suivantes:

$$J = i(1-f)$$

$$p = \frac{\alpha - 2fi}{i(1-f)}.$$

Nous avons présenté, dans ce qui précède, un aperçu général de deux catégories de recherches sur la réfraction astronomique, qui existent réellement, sans faire connaître chaque théorie séparément. Quoique nous supposions que le lecteur soit bien instruit de l'histoire de la théorie de la réfraction (1), nous jugeons néanmoins nécessaire de faire quelques remarques critiques sur celles des théories de la réfraction qui servirent effectivement à construire les tables destinées aux besoins de l'astronomie. Il ne sera pas superflu de les rapprocher l'une de l'autre pour montrer leur différence, et en même temps, leur insuffisance lorsqu'il s'agit de calculer la réfraction correspondante aux températures très basses ou très élevées.

5. Les recherches du siècle précédent sur la réfraction astronomique conduisirent à ce résultat remarquable que la constitution de l'atmosphère doit être comprise entre deux limites: l'une d'une densité décroissante, avec la hauteur de la couche, en progression arithmétique, et l'autre d'une densité décroissante en progression géométrique. Laplace, par qui commence une série de nombreuses théories sur le sujet en question dans le siècle présent, eut l'idée de mêler les deux progressions en les multipliant l'une par l'autre, et en laissant aux observations de décider laquelle d'entre elles doit se faire sentir de préférence. Pour faciliter l'intégration,

(1) L'ouvrage de M. Bruhns «Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischer Entwickelung, Leipzig. 1861» donne des notions assez complètes sur le développement progressif de la théorie des réfractions.

il diminua les hauteurs h d'une quantité toujours très petite $\alpha(1-\omega)$ en prenant

$$u = \frac{h}{a} - \alpha(1-\omega)$$

au lieu de $\frac{h}{a}$. De cette manière l'hypothèse de Laplace s'exprime par les relations suivantes:

$$\frac{h}{a} - \alpha(1-\omega) = u$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(1 + \frac{f}{l'}u\right) e^{-\frac{u}{l'}} \qquad (19)$$

La constitution de l'atmosphère terrestre étant, par les formules précédentes, complétement définie il ne reste qu'à trouver les valeurs des quantités f et l' par l'observation de l'abaissement de la température dans l'atmosphère. Pour déterminer la fonction z, dans l'hypothèse considérée, mettons les valeurs précédentes dans la formule (12), et en divisant le résultat de l'intégration par

$$p_0 = l\,\varrho_0\,(1+\beta t_0)$$

nous trouverons

$$\frac{p}{p_0} = \frac{l'}{i}\left(1 + f + f\frac{u}{l'}\right) e^{-\frac{u}{l'}} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{i}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^2,$$

où, la quantité i désigne

$$i = \frac{l}{g_0\,a}(1+\beta t_0).$$

Mais en faisant, comme on a fait auparavant,

$$z = \frac{1+\beta t}{1+\beta t_0}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 - \omega,$$

et en remarquant que

$$z = \frac{p}{p_0}\frac{1}{1-\omega},$$

nous avons

$$z = \frac{l'}{i}\cdot\frac{1 + f + f\frac{u}{l'}}{1 + f\frac{u}{l'}} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{i}(1-\omega).$$

A la surface de la terre on a $u=o, \omega=o$, par conséquent

$$1=\frac{l'}{i}(1+f)+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{i}. \qquad (a)$$

Cette équation servira à déterminer l'une des quantités arbitraires l' et f lorsqu'on aura trouvé l'autre par l'observation. En vertu de cette équation nous obtenons

$$1-z=\frac{l'}{i}\frac{f\frac{u}{l'}}{1+f\frac{u}{l'}}+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{i}\omega. \qquad (20)$$

Cette formule montre que la température correspondante à la limite extrême de l'atmosphère est différente du zéro absolu. En effet, la quantité

$$\frac{f\frac{u}{l'}}{1+f\frac{u}{l'}},$$

pour cette limite, converge vers l'unité, on a donc

$$1-z_0=\frac{l'}{i}f+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{i},$$

où z_0 est la valeur de z relative à cette limite. En tenant compte de la relation (a) on trouve l'expression très simple de la quantité z_0

$$z_0=\frac{l'}{i}.$$

En se servant des valeurs suivantes

$$l'=0{,}0008641$$

$$i=0{,}0012958,$$

dont nous parlerons plus bas, nous trouvons que, dans l'hypothèse de Laplace, la température de l'air atmosphérique doit s'abaisser à — 82 degrés du thermomètre centigrade pour la limite en question.

Les observations de la température, faites sur de grandes élévations, donnent tout ce qui est nécessaire pour calculer ω; cette

dernière quantité étant connue, on trouvera aisément la valeur de $\frac{u}{l'}$, en la tirant de la seconde des équations (19). En mettant la valeur ainsi obtenue de $\frac{u}{l'}$ dans la formule (20), après y avoir éliminé la quantité $\frac{l'}{i}$ à l'aide de la formule

$$\frac{l'}{i} = \frac{1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{i}}{1 + f},$$

on obtiendra une relation entre ω et z dont on trouvera la valeur de la constante f. Cette relation fournira deux valeurs de la quantité f, l'une positive et l'autre négative; c'est la première qu'on doit choisir, parce qu'elle se conforme mieux aux observations de l'abaissement de la température dans l'atmosphère. L'ascension aérostatique de Gay-Lussac pouvait fournir les données nécessaires à ce calcul en supposant, ce qu'on faisait alors, que la quantité f reste constante pour les différentes saisons de l'année.

Ayant en vue de rapprocher la théorie de Laplace de celle de Ivory j'ai calculé la valeur de f de telle manière qu'elle donne le même abaissement de la température correspondant à la hauteur égale à 21000 pieds anglais comme il résulte de l'hypothèse de Ivory. J'ai choisi cette hauteur par la raison que, à cette hauteur, l'abaissement calculé est égal à celui qui a été trouvé, dans la suite, par les observations directes de M. Glaisher.

En partant des valeurs $\alpha = 0;00028348$, $i = 0,0012958$ relatives à la température de 10° centigrades adoptée dans la théorie de Ivory, j'ai trouvé

$$f = 0,33565$$

par conséquent la relation (a) donne

$$l' = 0,0008641.$$

Laplace, pour déterminer les valeurs numériques des quantités f et l', se servit de la réfraction horizontale tirée de l'observation. Certainement, en comparant la formule donnée par la théorie avec les

observations, on devait être sûr d'atteindre le but principal, c'est-à-dire, d'obtenir de bonnes tables des réfractions; cependant la construction de ces tables ne doit aucunement se fonder sur l'observation de la réfraction horizontale, car cette dernière se trouve ordinairement trop grande par l'influence de différentes causes perturbatrices. Laplace, à ce qu'il paraît, supposait qu'en accordant sa formule avec la réfraction la plus considérable, il devait, par cela même, s'attendre à ce que les réfractions plus petites correspondantes à des hauteurs croissantes fussent mises en accord avec plus d'exactitude. Mais c'est précisément le contraire qui a lieu; et les différentes théories qui ont paru après celle de Laplace, quoique basées sur des lois assez variées du décroissement de la densité de l'air, sont plus d'accord entre elles par rapport à la valeur de la réfraction horizontale qu'à celle correspondante à la hauteur de l'astre égale à 1°, 2°... Cette propriété de la réfraction se remarque plus distinctement dans le tableau comparatif donné à la fin de ce paragraphe, et qui donne la réfraction d'après les différentes théories.

Les valeurs $f = 0{,}49042$, $l = 0{,}000741816$ trouvées par Laplace, étant éloignées de la vérité, affectèrent sensiblement toutes les réfractions, en les rendant généralement trop fortes. Cette circonstance qui, d'ailleurs, pouvait être écartée, discrédita la théorie de Laplace, et Bessel, qui consacra beaucoup de temps à perfectionner les tables des réfractions, préféra employer les formules dont l'insuffisance était évidente, sans essayer les formules de Laplace.

L'hypothèse de Laplace sur la constitution de l'atmosphère terrestre, comparée à celles qui ont paru dans la suite, tient le premier rang par rapport à l'approximation de la constitution réelle. Elle est presque identique avec celle proposée par Ivory. En effet, en éliminant, par les moyens connus, la variable u des équations (19) on parvient à l'expression suivante de la quantité z:

$$z = 1 - \left(1 - \frac{l'}{i}\,\frac{1-2f^2}{1-f}\right)\omega - \frac{1}{2}\,\frac{l'}{i}\,\frac{f^2}{(1-f)^3}\,(1-4f+2f^2)\,\omega^2 + \cdots,$$

de laquelle, en y substituant les valeurs $l' = 0{,}0008641$, $f = 0{,}33565$,

$i = 0{,}0012958$, on obtient

$$z = 1 - 0{,}2224\,\omega + 0{,}0150\,\omega^2 + \cdots$$

L'hypothèse de Ivory est exprimée par la formule

$$z = 1 - \frac{2}{9}\,\omega,$$

on voit donc que les deux hypothèses en question coïncident, à peu de chose près, entre elles.

Toutes les conclusions, que nous venons de déduire de la théorie de Laplace, se présentent directement à l'esprit, et il est difficile d'expliquer maintenant pourquoi la théorie de Laplace a été désapprouvée par Plana, Ivory, et pourquoi on a imputé uniquement à cette théorie des imperfections qui, à la vérité, sont communes à toutes celles qui lui ont succédé.

La théorie proposée par Ivory est basée, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, sur l'hypothèse suivante:

$$z = 1 - f\omega$$

dans laquelle la valeur $f = \frac{2}{9}$ a été trouvée par l'observation directe du décroissement de la température dans l'atmosphère. La quantité z étant connue en fonction de la diminution de la densité de l'air, on aura la hauteur de la couche atmosphérique en effectuant l'intégration de la formule (13), après quoi l'évaluation de la réfraction astronomique ne présente aucune difficulté. Mais Ivory jugea possible de se borner à l'approximation du premier ordre des quantités f et $\frac{\alpha}{i}$ ce qui, pour l'état moyen de l'atmosphère pour lequel la quantité $\frac{\alpha}{i}$ diffère effectivement très peu de la quantité f, pouvait suffire. Pourtant il était nécessaire de ne pas perdre de vue que la quantité $\frac{\alpha}{i}$ varie considérablement lorsque la température de l'air diffère, par plusieurs degrés, de celle adoptée dans les tables de Ivory; ainsi, en négligeant les termes des ordres supérieurs au premier des quantités f et $\frac{\alpha}{i}$ on doit s'attendre à ce que les réfractions calculées correspondantes à la température autre que celle

adoptée dans les tables, seront entachées d'erreurs très sensibles. Cette circonstance effectivement a lieu dans les tables des réfractions construites par Ivory, et la variation de la réfraction, qui dépend de celle de la température, se trouve entièrement erronée.

Pour éviter cette source d'erreurs, on doit se servir de la formule que nous avons donnée à la fin du paragraphe précédent, ou, ce qui est plus avantageux, faire usage des formules suivantes:

$$b = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\,i\,(1-f)}}$$

$$p = \frac{\frac{\alpha}{i} - 2f}{1-f}$$

$$H_n = 2\sqrt{n}\, e^{nb^2} \int_{b\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{2i(1-f)}} \sin\theta \left\{ H_1 + p\,(H_2 - H_1) + p^2\left(\frac{3}{2} H_3 - 2H_2 + \frac{1}{2} H_1\right) + \cdots \right.$$

$$\left. \frac{(-p)^n}{1.2.3\ldots n}\left[H_1 - \frac{n}{2} 2^n H_2 + \frac{n(n-1)}{2.3} 3^n H_3 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} 4^n H_4 + \cdots\right] \right\}. \quad (21)$$

Pour obtenir l'approximation à un dixième de seconde près, il suffit de s'arrêter au terme du quatrième ordre de la quantité p dans la série qui donne r.

C'est d'après cette série, que nous avons calculé les réfractions relatives à l'hypothèse de Ivory, et nous avons trouvé un accord presque complet de ces dernières avec les réfractions correspondantes à l'hypothèse de Laplace. On trouvera les unes et les autres réfractions à la fin de ce paragraphe.

Nous avons fait la remarque plus haut que, parmi les théories de la réfraction astronomique, dans lesquelles la loi du décroissement de la température dans l'atmosphère est exprimée en fonction de la hauteur de la couche aérienne, la fonction

$$\frac{1}{z} = \left(1 + \eta \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\eta}{n} \frac{h}{a\,i}\right)^n \quad (22)$$

dans laquelle n est un nombre entier, joue le rôle principal. Il est inutile de les examiner séparément, car la plupart de ces théories n'ont pas servi à la formation des tables des réfractions; ainsi nous ne nous occuperons que de la théorie proposée par M. Gylden, comme étant la plus récente; elle doit nous intéresser d'autant plus que, d'après M. Gylden, le paramètre η doit être différent pour les différentes saisons de l'année (1).

Il y a déjà longtemps que M. Faye a fait observer que la réfraction, pour les hauteurs de l'astre très petites, est plus grande pendant les mois d'hiver, et plus petite pendant les mois d'été que celle qui se trouve directement par les tables, ou, en d'autres termes que, dans l'expression de la réfraction, doit exister un autre coefficient thermométrique, que celui qui est relatif à la réfrangibilité de l'air atmosphérique. M. Faye a proposé de déterminer la variation du paramètre qui entre dans la fonction z à l'aide de l'observation de la réfraction terrestre; M. Gylden fit dépendre la valeur de la réfraction astronomique de la variation du paramètre η. Evidemment l'un et l'autre supposent que la variation de la réfraction due à la variation du paramètre η est la même, quelle que soit la fonction z qu'on ait adoptée pour le calcul des réfractions. Si cela n'a pas lieu, la valeur du paramètre η, lorsqu'on le déduit des réfractions observées, ne sera pas la même pour les différentes hauteurs de l'astre observé. Pour voir si cette propriété a lieu, prenons les variations, dont il s'agit, correspondantes à deux fonctions z assez différentes: celle de M. Gylden qui est

$$z = \left(1 - \frac{\eta}{2} x\right)^2,$$

et celle de Ivory qui a pour expression

$$z = 1 - f\omega.$$

Soient η_0 et f_0 les valeurs moyennes de η et f relatives à une mê-

(1) Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Petersburg. 1866.

me saison de l'année, ou plutôt, à une même température de l'air; en faisant

$$\eta = \eta_0 (1 + \xi)$$

$$f = f_0 (1 + \xi)$$

on aura les variations suivantes de la réfraction, dépendantes de la quantité ξ, dans l'une et dans l'autre théorie:

Hauteur de l'astre.	Variation de la réfraction. Gylden.	Ivory.
0° 0′	$-113'',65\,\xi$ (1)	$-149'',4\,\xi + 26'',7\,\xi^2 - \ldots$
1° 0′	$-44,67\,\xi$	$-50,8\,\xi + 4,3\,\xi^2 - \ldots$
2° 0′	$-18,63\,\xi$	$-19,0\,\xi + 1,2\,\xi^2 - \ldots$

Pour mieux apprécier les nombres précédents nous mettons en vue le tableau suivant qui donne l'abaissement de la température pour chaque cinq mille pieds anglais, en l'exprimant en degrés de Fahrenheit. A côté, nous avons mis les nombres respectifs trouvés par M. *Glaisher* par l'observation directe exécutée dans l'atmosphère dégagée de nuages:

Hauteurs	Abaissement de la température observé	Ivory	Gylden
5000	20,9	16,8	14,5
10000	33,6	31,6	28,8
15000	43,8	44,8	42,8
20000	52,4	56,8	56,7
25000	58,1	66,8	70,3
30000	62,3	75,3	83,8

On voit, par ce dernier tableau, que l'abaissement de tempéra-

(1) Ces nombres sont empruntés du mémoire de M. Gylden, p. 78: Quant aux nombres relatifs à l'hypothèse de Ivory je les ai calculés au moyen de la formule (21) en me servant des valeurs moyennes de f, α et i, celles qui ont été employées par Ivory.

ture, dans l'hypothèse de M. Gylden, reste presque proportionnel à la hauteur, tandis que celui qui correspond à l'hypothèse de Ivory diminue progressivement, et il est plus rapproché de la loi observée que ne l'est le premier. La divergence des deux hypothèses, dont il s'agit, avait produit une divergence sensible dans les résultats donnés dans le premier tableau en rendant les coefficients de ξ, correspondants à l'hypothèse de M. Gylden, trop petits; il est donc visible qu'en choisissant une autre hypothèse qui donnerait l'abaissement de température plus près de la loi observée que celui de Ivory, on devrait trouver les coefficients de la quantité ξ, correspondants à la nouvelle hypothèse, considérablement plus forts que les coefficients trouvés par M. Gylden. Par conséquent en comparant les tables des réfractions de M. Gylden avec les observations on doit s'attendre à trouver la valeur de l'indéterminée ξ trop forte. Tout cela n'aura lieu que pour des hauteurs très petites de l'astre observé. Quand la hauteur de l'astre surpasse deux degrés, la variation de la réfraction due à la variation du paramètre contenu dans la fonction z, ne dépend que fort peu de l'hypothèse même, c'est-à-dire, on trouvera les réfractions suffisamment exactes en les calculant, soit dans l'atmosphère de M. Gylden, soit dans celle de Ivory.

D'après tout ce qui précède on doit conclure: 1) que le coefficient ξ trouvé à l'aide des observations des astres, à la hauteur qui ne dépasse pas un degré, sera autre que celui qu'on trouvera pour les hauteurs de deux ou de trois degrés. 2) le coefficient ξ déduit des observations directes de la réfraction relative à des hauteurs très petites nécessairement péchera toujours par excès en rendant le paramètre η, qui entre dans la formule

$$z = \left(1 - \frac{\eta x}{2}\right)^2$$

adoptée par M. Gylden, trop fort.

Cette dernière conclusion qu'il était facile de prévoir, trouve une pleine confirmation dans les observatiens de M. Fuss faites à

Poulkova; elle se trouve confirmée, en même temps, par les observations que j'ai faites moi-même à Kasan.

M. Fuss (1) a fait les observations des réfractions, près de l'horizon, pendant les années 1867, 1868 et 1869; il se servit d'un circle vertical portatif de Repsold à l'aide duquel il a observé quelques étoiles et le soleil à leur coucher, et plus souvent à leur lever. Comme le mémoire de M. Fuss ne présente pas d'observations qui soient relatives aux températures assez basses pendant l'hiver, il sera donc impossible de trouver la valeur juste du paramètre β dans la formule de M. Gylden

$$z = \left(1 - \frac{\beta}{2}\frac{h}{a}\right)^2$$

dans laquelle nous avons fait précédemment

$$\beta i = \eta, \quad \frac{h}{a\,i} = x.$$

Mais les observations d'été sont suffisamment abondantes, et M. Fuss en les comparant avec les tables de M. Gylden, fut conduit à la conclusion, que la valeur de β augmente, en passant des mois d'hiver aux mois d'été. Pour le mois d'Août il trouve $\beta = 209$, tandis que la valeur moyenne, comme elle est adoptée dans les tables, ne s'élève qu'à 120. La température moyenne du mois d'Août, à l'heure de l'observation, était 12° de Celsius; donc, c'est à cette température que se rapporte le nombre 209.

La valeur $\beta = 209$ donne l'abaissement de température exprimée en degrés de Fahrenheit, pour chaque cinq mille pieds anglais, comme il suit:

h	$t_0 - t$
5000 . . .	24°,9
10000 . . .	49, 8
15000 . . .	73, 9

(1) Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes. S Petersbourg. 1872.

h	$t_0 - t$
20000 . . .	97, 6
25000 . . .	120, 7
30000 . . .	143, 3.

En rapprochant ces nombres à ceux qui ont été trouvés par M. Glaisher on remarque que l'abaissement relatif à de petites hauteurs h, trouvé à l'aide de la réfraction observée, approche de celui qui a lieu effectivement dans les couches inférieures de l'atmosphère réelle, tandis que l'abaissement de température correspondant à de grandes hauteurs se trouve entièrement erronée. En effet, est il possible d'admettre que, pendant l'été, la température des couches atmosphériques qui se trouvent à la hauteur de 20000 à 30000 pieds anglais puisse s'abaisser beaucoup au dessous de la température de la congélation du mercure? Les observations de Gay-Lussac, de Glaisher et de tant d'autres contredisent une telle conclusion.

M. Fuss trouve, pour le mois de décembre, $\beta = 66$; mais la température respective étant assez modérée, et les hauteurs des astres observés trop grandes et en petit nombre, par cette raison le nombre 66 trouvé par M. Fuss ne peut exprimer la valeur de β pour des températures très basses. Pour remplir en partie cette lacune je ferai usage de mes observations sur les étoiles α Columbae et υ^4 Eridani. Les observations écrites dans le tableau suivant ont été faites à l'aide du cercle méridien de Repsold; la température de l'air est donnée en degrés de Celsius, et la hauteur du baromètre, à zéro du mercure, est exprimée en millimètres.

	Temps d'observ.		Hauteur appar.	Réfractions observées	Réfractions calculées	Baromètre	Temp. de l'air.
1	16 Févr. 1866	α Columbae	0° 39′ 58″,6	2196″,1	2026″,5—75″ξ	767,1	—25°,7
2	17 Févr.	υ^4 Erid.	0 39 57 ,8	2122 ,8	2025 ,0—75 ξ	772,9	—24 .7
3	»	α Col.	0 39 8 ,7	2146 ,3	2062 ,0—75 ξ	773,8	—26 ,1
4	18 Févr.	υ^4 Erid.	0 40 29 ,6	2154 ,7	2035 ,4—75 ξ	779,4	—24 ,1

5	24 Févr. 1866	α Columbae	0° 39′ 1″,5	2139″,9	2014″,5—75″ξ	770,3	—23°,0
6	8 Janv. 1867	υ^4 Erid.	0 39 16, 0	2156, 0	2004, 0—75 ξ	769,8	—22, 2
7	»	α Col.	0 38 27, 0	2095, 1	2014, 0—76 ξ	770,2	—22, 5
8	25 Janv.	υ^4 Erid.	0 43 4, 0	2301, 4	2037, 0—74 ξ	764,7	—30, 0
9	»	α Col.	0 42 27, 5	2339, 6	2051, 0—74 ξ	762,8	—30, 7
10	8 Févr.	υ^4 Erid.	0 39 41, 2	2100, 1	1921, 0—71 ξ	766,9	—16, 7
11	»	α Col.	0 37 51, 9	2066, 7	1949, 0—74 ξ	766,8	—17, 3
12	9 Févr.	υ^4 Erid.	0 40 14, 5	2133, 5	1938, 0—72 ξ	768,0	—18, 4
13	»	α Col.	0 38 27, 8	2102, 7	1963, 0—74 ξ	768,3	—19, 1
14	16 Févr.	α Col.	0 35 41, 1	1936, 9	1886, 7—73 ξ	755,7	—12, 2
15	21 Févr. 1868	α Col.	0 39 20, 2	2163, 8	2036, 2—76 ξ	776,1	—22, 5

Les réfractions calculées ont été déduites des tables de M. Gylden; et la quantité ξ est égale à $\frac{d\beta}{\beta}$.

De ces observations on obtient les équations suivantes qui doivent servir à déterminer la valeur de ξ correspondante à la température moyenne égale à — 22°,3:

$$1 \ldots + 169'',6 = -75''\xi$$
$$2 \ldots + 97,8 = -75\,\xi$$
$$3 \ldots + 84,3 = -77\,\xi$$
$$4 \ldots + 119,3 = -75\,\xi$$
$$5 \ldots + 125,4 = -75\,\xi$$
$$6 \ldots + 152,0 = -75\,\xi$$
$$7 \ldots + 81,1 = -76\,\xi$$
$$8 \ldots + 264,4 = -74\,\xi$$
$$9 \ldots + 288,6 = -74\,\xi$$
$$10 \ldots + 179,1 = -71\,\xi$$
$$11 \ldots + 117,7 = -74\,\xi$$
$$12 \ldots + 195,5 = -72\,\xi$$
$$13 \ldots + 139,7 = -74\,\xi$$
$$14 \ldots + 50,2 = -73\,\xi$$
$$15 \ldots + 127,6 = -76\,\xi.$$

On voit que toutes les quinze observations, excepté la quatorzième qui se rapporte à la température bien modérée $-12°,2$, donnent, pour ξ, la valeur plus grande que l'unité. Si on laisse de côté les trois équations 8, 9 et 14 qui sont relatives aux températures de l'air trop différentes de la moyenne, et qu'on en prenne la moyenne générale, on trouve

$$126'',1 = -74'',5\ \xi,$$

d'où il suit

$$\xi = -1,6926.$$

Mais en remarquant que la valeur moyenne du paramètre β adoptée dans les tables de M. Gylden est 120, on aura la valeur de β négative est égale à $-83,1$, si l'on veut que les observations précédentes soient mises en accord avec l'hypothèse de M. Gylden.

La valeur de β négative et si grande est entièrement inadmissible; autrement elle conduirait à ce résultat paradoxal que la température des couches atmosphériques en hiver devrait suivre une loi tout-à-fait renversée, c'est à dire, qu'elle augmenterait presque dans le même rapport où elle décroit en été.

La quantité ξ étant, en effet, négative pour les mois d'hiver ne doit pas surpasser l'unité. Le cas où la théorie de M. Gylden nous a donné une valeur plus grande que l'unité s'explique par deux raisons: la première consiste en ce que le coefficient numérique de la quantité ξ correspondant à l'atmosphère de M. Gylden est plus faible que celui qui a lieu pour l'atmosphère réelle; secondement, que ce coefficient augmente effectivement lorsque la température de l'air s'abaisse, tandis que M. Gylden le considère comme une quantité constante et indépendante de la température.

La conclusion à laquelle nous sommes arrivés sur l'incompatibilité des limites, entre lesquelles les observations de la réfraction font varier le paramètre de la fonction z adoptée par M. Gylden, s'applique à toutes les autres théories de la réfraction astronomique dans lesquelles le décroissement de température, pris pour base du calcul, est presque proportionnel à la hauteur de la couche atmo-

sphérique; elle s'applique également à l'hypothèse de Laplace et à celle de Ivory, quoique à un degré moins prononcé. Evidemment on ne fera que compromettre les résultats, lorsqu'on voudra se fonder sur la valeur du paramètre β déterminé à l'aide des hauteurs de l'astre très petites, pour s'en servir dans le calcul des réfractions correspondantes à des hauteurs plus grandes.

La fonction (22) n'est pas capable de se plier aux observations, soit de la température dans l'atmosphère, soit de la réfraction astronomique, ainsi on ne gagnera rien en y essayant d'autres valeurs de n. Cette fonction étant appliquée à la formule barométrique ajoute à la formule de Laplace les termes qui restent sans importance, quelque soit le nombre n. Quant aux réfractions, il est aisé de voir, que la même chose y a lieu. En effet cette fonction introduit dans la valeur du rapport de deux densités ϱ et ϱ_0, ou dans la valeur de la variable ω, le terme suivant dépendant du nombre n:

$$\frac{1}{2n}\eta^2\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)e^{-x},$$

dont l'action sur la réfraction horizontale ne se manifeste que par la quantité minime

$$0'',7\,\frac{1}{n},$$

qui est évidemment beaucoup plus faible que l'erreur produite par l'incertitude qui plane toujours sur la valeur du paramètre η, trouvée à l'aide du décroissement de la température observé dans l'atmosphère terrestre.

Nous ne jugeons pas nécessaire d'entrer dans plus de détails sur les théories de la réfraction astronomique basées sur des fonctions empiriques destinées à exprimer la loi de la distribution de la chaleur dans l'atmosphère, mais nous croyons qu'il ne sera pas superflu de faire exception de deux théories: celle de Lubbock et celle de Bauernfeind. Quoique ni l'une ni l'autre n'expliquent la variabilité de la réfraction observée dans les différentes saisons de l'année, mais, se rattachant aux principes qui, dans la suite, ont été élargis par la

théorie mécanique de la chaleur, elles seront par cela même intéressantes. Ces deux théories sont uniques, où on voit un coup d'essai dans l'explication de la loi du mouvement de température dans les couches atmosphériques. Pour faire connaître l'idée fondamentale des théories en question il faut remonter aux notions dues à Laplace, qui ont servi de base pour la théorie moderne de la chaleur.

Soit v le volume de l'unité de poids de l'air, p sa force élastique, T la température, on a la relation

$$p\,v = h\,T, \qquad (a)$$

h étant une quantité constante.

Soit Q la chaleur consommée par cette unité de l'air; en supposant que Q soit la fonction de trois variables p, v et T on peut y éliminer la dernière de ces variables à l'aide de la relation précédente, et regarder Q comme une fonction de deux variables indépendantes p et v. On aura donc

$$dQ = \frac{dQ}{dp}dp + \frac{dQ}{dv}dv.$$

Appelons C_0 et C_1 les deux capacités caloriques, l'une à volume constant et l'autre à pression constante, on a

$$C_0 = \frac{dQ}{dp}\frac{dp}{dT}, \quad v \text{ constant}$$

$$C_1 = \frac{dQ}{dv}\frac{dv}{dT}, \quad p \text{ constant.}$$

L'expérience a montré que le rapport de deux quantités C_1 et C_0 que nous désignerons par γ est constant, par conséquent on a

$$\gamma\frac{dQ}{dv}\frac{dv}{dT} = \frac{dQ}{dp}\frac{dp}{dT};$$

mais la loi de Gay-Lussac et de Mariotte, ou la relation (a) donne

$$\frac{dp}{dT} = \frac{h}{v}$$

$$\frac{dv}{dT} = \frac{h}{p},$$

par conséquent l'équation précédente se transforme en celle-ci:

$$\gamma p \frac{dQ}{dp} = v \frac{dQ}{dv}.$$

L'équation précédente fournit, pour l'intégrale, l'expression suivante:

$$Q = f(v p^{\frac{1}{\gamma}}),$$

dans laquelle f désigne une fonction arbitraire.

La quantité $v p^{\frac{1}{\gamma}}$, lorsqu'on y élimine v à l'aide de la formule (a) devient égale à

$$h p^{\frac{1}{\gamma}-1} T,$$

d'où il suit qu'en supposant que la quantité Q croisse proportionnellement à la température T, lorsque la pression reste invariable, l'intégrale précédente doit être de la forme

$$Q = A + B v p^{\frac{1}{\gamma}} (1), \qquad (b)$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

Si la quantité de chaleur reste invariable pendant que le volume v et la pression p varient en devenant v_0 et p_0, on doit avoir

$$v p^{\frac{1}{\gamma}} = v_0 p_0^{\frac{1}{\gamma}},$$

ou, en remarquant que les volumes v et v_0 sont dans le rapport inverse des densités ϱ et ϱ_0, on obtiendra

$$\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho} = \frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho_0},$$

en suite

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma}. \qquad (c)$$

(1) Mécanique céleste. V. 5. p. 128.

Supposons que cette dernière condition ait lieu pour l'atmosphère terrestre, il sera facile d'en tirer les conclusions par rapport aux variations de température des différentes couches atmosphériques. En effet cette dernière relation suffit pour obtenir la valeur de la quantité

$$z = \frac{1 + \beta t}{1 + \beta t_0}$$

en fonction de la hauteur h de la couche atmosphérique, et il est facile de trouver, en s'aidant de la loi de Gay-Lussac et de Mariotte, et de l'équation (12), la relation suivante:

$$z = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{g_0}{l}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) h.$$

On déduit de cette relation que la température de la couche atmosphérique qui se trouve à la hauteur h audessus de la surface de la terre, doit être proportionnelle à cette hauteur. La valeur de γ étant à peu près égale à 1,41, et en prenant $g_0 = 1$, $l = 7990$ mètres, nous aurons 101 mètres pour la valeur de la hauteur à laquelle le thermomètre centigrade s'abaisse d'un degré.

Ce résultat a lieu dans l'hypothèse que la quantité Q reste invariable, ou en d'autres termes, que la température d'air ne varie qu'en raison de son expension sans d'autres causes qui pourraient influencer sensiblement la loi à laquelle on vient d'arriver. Comme le décroissement uniforme de température est loin d'avoir lieu, on a imaginé que l'insuffisance de la théorie pourrait être suppléée par la participation de la valeur d'eau contenue dans l'air atmosphérique dont l'effet, troublant la loi théorique, soit assez fort pour expliquer la divergence entre le calcul et la théorie.

S. J. Lubbock (1) a pris l'équation (*b*) donnée par Laplace, pour base de sa théorie de la réfraction astronomique; mais il y en ajoute

(1) Memoirs of the royal astronomical society. 1836.

une autre

$$Q = C + D(1 + \beta t)$$

qui ne diffère de celle de Laplace que par la signification de la quantité D. Sclon Lubbock D est une constante tandis que, dans la formule de Laplace, le coefficient D, étant proportionnel à la quantité $p^{\frac{1}{\gamma}-1}$, est variable. Il est donc évident que l'équation que l'on tirera de ces deux expressions de la quantité Q, doît être illusoire, comme dérivant de deux conditions contradictoires.

En remplaçant dans la formule (*b*) la quantité v par $\frac{1}{\varrho}$, et en y éliminant Q à l'aide de la formule de Lubbock on trouve

$$D(1 + \beta t) - B\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho} = D(1 + \beta t_0) - B\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho_0}.$$

Cette formule, en y mettant, pour $\frac{1}{\varrho}$ la valeur $\frac{l}{p}(1 + \beta t)$, et pour $\frac{1}{\varrho_0}$ la valeur $\frac{l}{p_0}(1 + \beta t_0)$ conduit à l'expression suivante de la fonction z:

$$z = \frac{D - Bl\,p_0^{\frac{1}{\gamma}-1}}{D - Bl\,p^{\frac{1}{\gamma}-1}}.$$

Comme la pression p varie entre les limites zéro et $p = p_0$, il s'en suit, qu'en posant

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 1 - q,$$

et en remarquant que l'exposant $1 - \frac{1}{\gamma}$ est positif, la quantité q ne variera qu'entre les limites zéro et unité. Donc en prenant p_0 pour unité des pressions, et en faisant, pour simplifier la formule,

$$\frac{D}{D - Bl} = H,$$

on aura

$$z = \frac{1 - q}{1 - Hq}.$$

Cette valeur de z et la loi de Gay-Lussac et de Mariotte donnent la valeur suivante du rapport des deux densités ϱ et ϱ_0:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = (1-q)^{\frac{1}{\gamma-1}}(1-Hq).$$

La hauteur h de la couche aérienne peut être déterminée aisément en fonction de la nouvelle variable q; en effet on a

$$\frac{dp}{\varphi} = -\frac{g_0}{l(1+\beta t_0)}\frac{dh}{z};$$

si l'on y met les valeurs de z et p exprimées en fonction de la quantité q on obtient

$$h = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{l(1+\beta t_0)}{Hg_0}\log(1-Hq).$$

Lubbock se servit des observations bien connues de Gay-Lussac, faites pendant son ascension aérostatique, pour déterminer la valeur de la constante H. En adoptant $\gamma = \frac{3}{2}$, pour éviter des difficultés que pourrait présenter la valeur exacte de γ dans l'intégration, il trouve

$$H = 0{,}54378.$$

La valeur $= \frac{3}{2}$ donne, pour $\frac{\varrho}{\varrho_0}$, l'expression rationnelle qui suit:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = (1-q)^2(1-Hq),$$

par conséquent l'intégration de la différentielle de la réfraction astronomique s'effectuera facilement.

Quant à la loi du décroissement de température de l'air atmosphérique, il est aisé de voir que ce décroissement doit être à peu près uniforme. En effet, en faisant, pour abréger,

$$\lambda = \frac{3\,l(1+\beta t_0)}{Hg_0},$$

on a

$$1-z = \frac{1-H}{H}(e^{\frac{h}{\lambda}}-1).$$

Le rapport de la variation de la température t à celle de la hauteur h s'exprime par la formule

$$\frac{dt}{dh} = -\frac{(1-H)g_0}{3\beta l} e^{\frac{h}{\lambda}};$$

mais la quantité λ étant à peu près égale à 44080 mètres, il s'en suit que, pour les hauteurs assez petites des couches atmosphériques, le rapport dont il s'agit, devient constant, et est égal à

$$-\frac{(1-H)g_0}{3\beta l}.$$

Lorsque la hauteur h, en augmentant devient comparable à la quantité λ, de telle sorte que la fraction $\frac{h}{\lambda}$ cesse d'être très petite, la valeur du rapport de la variation de la température t à celle de la hauteur h deviendra plus grande que celle correspondante aux couches inférieures; d'où il suit que le décroissement de t augmentera d'une manière continue pour devenir infiniment grand pour h infini. Mais il faut remarquer que l'atmosphère imaginée par S. J. Lubbock étant limitée et ne s'étendant qu'à la hauteur h_1 qui est déterminée par la formule

$$h_1 = -\lambda \log (1-H),$$

il s'en suit que, à cette hauteur, la température respective doit s'abaisser à zéro absolu.

D'après tout ce que nous venons de dire on voit que la théorie de S. J. Lubbock n'admet pas que la réfraction astronomique puisse dépendre d'autres coefficients thermométriques que ceux qui entrent dans l'expression de α et i. Du reste il ne faut pas oublier que l'existence du ce nouveau coefficient, au temps où a paru la théorie de S. J. Lubbock n'a pas été mise tout à fait hors de doute.

M. Bauernfeind, dans sa théorie de la réfraction astronomique (1) adopte la relation déjà connue

(1) Astronomische Nachrichten № 1478 et les suivants.

$$z = 1 - \frac{g_0(1-\gamma)}{l\gamma} h = (1-\omega)^{\gamma-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

qui a lieu, comme on l'a montré plus haut, dans l'hypothèse de l'invariabilité de la quantité Q. En faisant dans cette relation

$$\frac{l\gamma}{g_0(1-\gamma)} = h_1$$

et en appelant par h_1 la hauteur totale de l'atmosphère terrestre il détermine la valeur de h_1, ainsi que celle de γ, à l'aide des observations de la température et de la pression barométrique exécutées sur des montagnes. Ces observations lui ont donné $\gamma = 1{,}2035$ Pour plus de simplicité il adopte $\gamma = 1{,}2$ de sorte qu'on a

$$\left(1 - \frac{h}{h_1}\right)^5 = 1 - \omega.$$

Quant à la quantité h_1 M. Bauerfeind la détermine à l'aide du décroissement de température observé sous différentes latitudes. En regardant l'inégalité de ce décroissement comme le résultat de la figure sphéroïdique de la dernière couche de l'atmosphère terrestre il trouve, pour h_1, la valeur suivante exprimée en toises:

$$h_1 = 25100\,(1 + 0{,}14734 \cos 2\varphi),$$

où φ désigne la latitude du parallèle respectif. M. Bauernfeind ne s'explique pas à quoi on doit attribuer cette figure sphéroïdique de l'atmosphère terrestre. Doit on la regarder comme une conséquence déduite de la théorie, ou simplement comme l'interprétation géométrique du fait confirmé par les observations donnant le décroissement moyen de température autre sous l'équateur que celui qui a lieu sous de hautes latitudes. Le décroissement en question, dans le même lieu, n'étant pas le même pendant les différentes saisons, il était nécessaire de tenir compte de la variation respective de h_1. Dans l'expression de la différentielle de la réfraction astronomique, la hauteur h d'une couche atmosphérique est divisée par le rayon de courbure a de la terre, en faisant donc

$$\frac{h_1}{a} = m, \qquad \frac{h}{h_1} = y$$

on aura

$$\frac{h}{a} = m\,y$$

et la quantité m ayant la valeur particulière pour chaque lieu d'observation et correspondante à la température moyenne annuelle se déduira de la valeur h_1 déjà connue. En divisant la valeur trouvée de m par la quantité $\frac{1}{\beta}$ augmentée de la température moyenne annuelle, on obtiendra la variation de m pour un degré de la variation de température; par conséquent on en tirera la valeur de m relative à la température adoptée dans les tables des réfractions, et enfin celle qui se rapportera à la température correspondante à l'observation de la réfraction.

Evidemment le procédé exposé ici ne diffère pas essentiellement de celui qui a été adopté plus tard par M. Gylden. Comme la différence entre la loi du décroissement de la fonction z dans la théorie de M. Gylden et dans celle de M. Bauernfeind est insignifiante, on doit donc obtenir presque les mêmes résultats, non seulement pour la réfraction moyenne, mais aussi pour la variation de la réfraction dépendante de celle de la température. M. Bauernfeind n'a pas jugé nécessaire de calculer les tables complètes des réfractions, il est donc impossible de tirer une conclusion sur ce sujet.

En terminant ces remarques que nous venons de faire sur les théories principales qui ont paru dans le siècle présent, nous supposons qu'il ne sera pas inutile de donner le tableau d'où l'on pourrait voir quelles différences existent effectivement dans les réfractions moyennes trouvées au moyen de ces théories. Comme la fonction z sert de base à la réfraction astronomique, et que cette fonction peut être aisément vérifiée par les observations, nous jugeons donc nécessaire de présenter d'abord le tableau qui donne le décroissement de température dans les couches atmosphériques, suivant les théories dont nous avons parlé. Nous y avons ajouté les nombres qui se rapportent à la théorie de Bessel. Le tableau suivant a

été calculé de manière que l'abaissement relatif à la hauteur de vingt-un pieds fût le même dans l'hypothèse de Laplace, de Ivory et dans celle de M. Gylden, que celui qui a été trouvé effectivement par l'observation directe de M. Glaisher. Nous nous sommes servi de l'ancien coefficient β de la dilatation de l'air, pour n'avoir pas besoin de récalculer la valeur du paramètre qui entre dans la fonction z adoptée par Ivory et dans celle de S. J. Lubbock. L'abaissement de température, comme il suit ici, est donné en degrés de Fahrenheit.

Hauteur.	observ.	Laplace.	Ivory.	Gylden.	Lubbock.	Bessel.
5000	20°,9	15°,2	15°,4	13°,1	14°,2	3°,4
10000	33 ,6	28 ,7	29 ,1	25 ,9	28 ,9	7 ,6
15000	43 ,8	40 ,8	41 ,3	38 ,6	44 ,1	13 ,4
20000	52 ,4	51 ,5	52 ,1	51 ,1	59 ,9	20 ,0
25000	58 ,1	60 ,9	61 ,6	63 ,4	76 ,2	28 ,5
30000	62 ,3	69 ,2	69 ,9	75 ,6	93 ,3	

Selon toutes les théories, excepté celle de Laplace et de Ivory, la température relative aux couches supérieures de l'atmosphère terrestre doit s'abaisser à zéro absolu. D'après Laplace et Ivory cette température est bien modérée, ne dépassant pas respectivement 160 et 107 degrés.

Le tableau précédent montre que, dans aucune des théories dont nous avons parlé, la fonction z ne reproduit les valeurs de l'abaissement de température qui puissent être regardées comme suffisamment rapprochées de celles que donne l'observation. Dans la théorie de Bessel les écarts sont les plus grands et, par cela même ils influencèrent très sensiblement les réfractions de „Fundamenta“ en rendant trop exagérées toutes les réfractions correspondantes à de petites hauteurs de l'astre observé. Pour voir, comment les

différentes expressions de la fonction z se font sentir dans la valeur de la réfraction, nous avons dressé le tableau comparatif donnant les réfractions relatives aux 5 premiers degrés en partant de l'horizon. Les réfractions qui se rapportent aux hypothèses de Laplace, de Ivory et de Lubbock sont calculées au moyen des mêmes valeurs des quantités α et i, savoir $\alpha = 0{,}00028348$, $i = 0{,}0012958$, et elles ont lieu pour la hauteur du baromètre de 30 pouces anglais, et pour la température $t_0 = 10°C$. C'est, pour n'avoir pas besoin de recalculer les réfractions de Lubbock, que nous avons adopté les nombres précédents. Quant aux réfractions qui se déduisent de l'hypothèse de Laplace, nous avons jugé nécessaire de les calculer à l'aide de la nouvelle valeur de la constante $f = 0{,}33565$ par la raison expliquée plus haut à la page 28. Les réfractions de Bessel et de Gylden sont tirées des tables respectives, en les réduisant à la température $t_0 = 10°C$, et au baromètre $b_0 = 30$ p.

$90° - \theta$	Ivory.	Laplace.	Gylden.	Lubbock.	Bessel.
0° 0′	2074″,7	2075″,2		2075″,4	2193″,8
0 30	1731 ,6	1731 ,9	1730 ,9	1725 ,7	1789 ,5
1 0	1469 ,0	1468 ,8	1465 ,6	1461 ,5	1496 ,6
1 30	1264 ,0	1264 ,1	1260 ,5	1257 ,7	1277 ,0
2 0	1102 ,4	1102 ,4	1099 ,4	1097 ,3	1105 ,2
3 0	867 ,3	867 ,3	865 ,2	864 ,3	866 ,7
4 0	707 ,8	707 ,7	706 ,4	706 ,0	705 ,7
5 0	594 ,1	594 ,1	593 ,2	593 ,1	591 ,9
45° 0′	58 ,36	58 ,36	58 ,324	58 ,36	58 ,225

S'il ne s'agissait que des réfractions moyennes, on pourrait dire que les quatre premières théories n'accusent pas des différences trop fortes pour que l'on soit obligé de désirer quelque chose de mieux. Mais la question se présente sous un autre point de vue, quand on

cherche à satisfaire aux observations de la réfraction à l'aide de la théorie. En parlant de la théorie de M. Gylden nous avons vu, quelles difficultés on rencontre, dès que l'on veut obtenir les réfractions pour des températures très basses ou très élevées. On sait que ces difficultés ne sont pas moins considérables quand il s'agit des réfractions terrestres; ces dernières se trouvent par l'observation, si souvent en désaccord avec la théorie que l'on ne sait pas à quoi on doit attribuer la cause de ces irrégularités. Prenons, par exemple, la théorie de Ivory exprimant le mieux la loi de température de l'atmosphère terrestre, et voyons quelles valeurs de la réfraction terrestre elle donne. Des équations (6) et (13) combinées avec celle-ci

$$z = 1 - f\omega$$

on obtient facilement, pour la valeur de la réfraction terrestre, l'expression suivante:

$$r = \frac{\alpha}{i}\,\frac{c}{1+f}$$

c étant l'angle compris entre deux droites menées du centre de la terre aux deux extremités de la courbe décrite par le rayon lumineux.

Le coefficient $\frac{\alpha}{i}$, variant particulièrement avec la température observée à la station inférieure, est toujours compris dans des limites restreintes; la quantité f, dans l'espace de quelques heures où la température de l'air n'a pas changé considérablement, ne pourra subir des variations assez fortes pour rendre les variations de r très grandes. On devrait donc s'attendre à ce que la réfraction terrestre ne pût accuser des variations considérables. Cependant l'observation montre le contraire. Il existe bon nombre d'observations où la réfraction, dans un jour, est susceptible de varier entre des limites très larges, en devenant presque nulle, quand la température de l'air est assez élevée. Pour expliquer ces variations il serait nécessaire d'admettre que la quantité f fût sujette à des variations excessives

qui non seulement seraient en désaccord avec la loi du décroissement de température dans les couches atmosphériques, mais qui rendraient les réfractions astronomiques tout-à-fait erronées.

Les observations des réfractions terrestres, quand elles sont déduites de deux distances zénithales observées simultanément dans les deux extrémités de la courbe de réfraction, seront toujours très importantes pour l'étude théorique, à condition que les observations météorologiques correspondantes soient faites avec la précaution désirée. Le baromètre, et surtout le thermomètre doivent être abritées soigneusement pour éviter les irrégularités que les influences locales peuvent produire. Ayant en vue de montrer toute l'importance des observations météorologiques faites sur les deux points dont on cherche la différence de niveau à l'aide des mesures de distances zénithales, je crois utile d'appuyer les calculs subséquents par un exemple tiré des observations effectives. M. Baeyer et M. v. Hesse ont mesuré les distances zénithales réciproques de deux points Kupferkuhle et Brocken, éloignés l'un de l'autre de 24546,9 toises. Ces observations étaient exécutées simultanément dans les intervalles de 1 heure, à partir de $6^h\,35'$ de matin le 1 Sept. 1849, jusqu'à $5^h\,34'$ le soir du même jour. Nous empruntons ces observations du mémoire de M. Baeyer (1).

	Kupferkuhle, Station inférieure.			Brocken, Station supérieure.		
Temps d'observ.	θ	Barom. à 0°	Therm. R.	θ'	Barom. à 0°	Therm. R.
$6^h\,35'$	89°0′ 2″,94	331^l,21	+ 8°,4	88°39′40″,58	295^l,11	+ 8°,8
7 34	0 12 ,64	331 ,20	12 ,0	39 36 ,29	295 ,20	10 ,3
8 34	0 39 ,29	331 ,26	14 ,3	39 18 ,86	295 ,37	11 ,4
9 34	0 59 ,97	333 ,34	14 ,7	39 19 ,85	295 ,41	10 ,7

(1) Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Mém. de l'Académie des Sciences St. Petersburg 1860.

h		l			l	
10 34′	89°1′10″,11	331 ,26	+ 15°,9	88°39′10″,54	295 ,37	+ 11°,5
11 34	1 14 ,32	331 ,18	17 ,2	39 1 ,77	295 ,39	11 ,8
12 34	1 20 ,31	331 ,18	18 ,1	38 57 ,92	295 ,36	11 ,6
1 34	1 20 ,89	331 ,20	18 ,7	38 56 ,78	295 ,41	11 ,8
2 34	1 21 ,44	331 ,20	18 ,7	38 56 ,92	295 ,43	11 ,8
3 34	1 16 ,77	331 ,11	18 ,6	39 0 ,53	295 ,37	11 ,8
4 34	1 13 ,90	331 ,04	18 ,3	39 3 ,68	295 ,32	11 ,3
5 34	1 9 ,05	331 ,07	17 ,8	39 8 ,37	295 ,27	10 ,3

En appelant q et q' les réfractions relatives aux deux extrémités de la trajectoire décrite par le rayon lumineux, q se rapportant à la station inférieure et q' à la station supérieure, on a, pour déterminer la différence de niveau h, la formule suivante:

$$\frac{h}{2a+h} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cot\left(\frac{\theta+\theta'}{2}+\frac{q-q'}{2}\right). \qquad (a)$$

La quantité $\frac{q-q'}{2}$ reste inconnue, et on n'a aucun moyen de déterminer sa valeur, c'est par cette raison qu'on est obligé de se contenter de la valeur approchée de h en négligeant $\frac{q-q'}{2}$. La valeur de h ainsi trouvée, doit donc être regardée comme la plus probable, vu l'impossibilité d'en trouver une autre qui soit plus rapprochée.

Quand il n'existe que des observations simples donnant les distances zénithales du point supérieur, mesurées dans la station inférieure, le cas qui arrive souvent, la valeur de h, trouvée à l'aide de la formule

$$\frac{h}{2a+h} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cot\left(\theta-\frac{c}{2}+\frac{r}{2}\right) \qquad (a')$$

où $r = q + q'$ désigne la réfraction totale, sera sujette à toutes les incertitudes que la théorie n'est pas en état de lever. Dans ce cas il se présente la question de savoir, si nous ne pourrions pas nous servir de l'équation connue

$$(a+h)\sin\theta'\sqrt{1-2\alpha\omega}=a\sin\theta \qquad (b)$$

pour le calcul de la réfraction r, en supposant que, dans les deux points, les observations météorologiques réciproques aient été faites. Ces dernières observations sont faciles à faire, et on doit penser que l'on ne manquera pas de trouver partout des personnes assez habiles pour les exécuter. L'équation précédente qui est entièrement indépendante de la loi de densité des couches atmosphériques pourvu qu'elles soient concentriques avec le sphéroïde terrestre, a été proposée, pour ce but, par Biot; mais il l'a jugée propre à donner la valeur de h à l'aide des distances zénithales θ et θ', sans connaître la valeur de l'angle c. Dans ce qui va suivre nous montrerons que cette équation combinée avec la formule (a) est capable de nous fournir la valeur de la réfraction r, au moyen des éléments météorologiques, et l'incertitude de la réfraction ainsi calculée ne dépassera pas celle qui affecte ordinairement la valeur de h trouvée par la formule (a) en y négligeant la différence $q-q'$.

Nous trouverons aisément la formule suivante, tout-à-fait exacte, en éliminant $\operatorname{tg}\frac{\theta+\theta'}{2}$ de deux formules (a) et (b):

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}-\operatorname{tg}\frac{c-r}{2}=\xi\left\{\frac{2a+h}{h}\operatorname{tg}\frac{c}{2}-\frac{h}{2a+h}\operatorname{tg}\frac{c-r}{2}\right\}$$
$$+\operatorname{tg}\frac{q-q'}{2}\left\{\frac{2a+h}{h}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{c-r}{2}+\frac{h}{2a+h}-\xi-\xi\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{c-r}{2}\right\}$$

ou celle-ci

$$\sin\frac{r}{2}=\xi\left\{\frac{2a+h}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c-r}{2}-\frac{h}{2a+h}\cos\frac{c}{2}\sin\frac{c-r}{2}\right\}$$
$$+\operatorname{tg}\frac{q-q'}{2}\left\{\frac{2a+h}{h}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c-r}{2}+\frac{h}{2a+h}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{c-r}{2}-\xi\cos r\right\}. \qquad (23)$$

On a posé dans cette formule,

$$\xi=\frac{1-\sqrt{1-2\alpha\omega}}{1+\sqrt{1-2\alpha\omega}}=\frac{1}{2}\alpha\omega+\cdots$$

Le second, le quatrième et le dernier terme de l'expression précédente de $\sin\frac{r}{2}$ sont insensibles, comme il est facile de s'en convaincre; en les négligeant, et en faisant quelques réductions permises on obtient

$$r=\alpha\omega\frac{s}{h}+\frac{s}{h}\sin(c-r)\operatorname{tg}\frac{q-q'}{2} \qquad (c)$$

où $s = ac$ désigne la distance de deux points dont on cherche la différence de niveau.

Le coefficient $\frac{s}{h}\sin(c-r)$ qui entre dans le dernier terme, ne dépassant pas l'unité, est généralement assez petit: pour les observations mentionnées plus haut il s'élève à un tiers près; il s'en suit donc que, en négligeant le dernier terme dans la formule (*c*), on commet l'erreur, dans la valeur de h tirée de la formule (*a'*), qui ne dépasse pas celle qui résulte de la formule (*a*) dans laquelle on néglige la quantité $q—q'$. On aura donc pour la réfraction terrestre

$$r = \alpha\,\omega\,\frac{s}{h}. \qquad (d)$$

Il s'agit maintenant de savoir si l'on ne peut pas utiliser, avec succés la formule (*d*) pour la détermination de la réfraction r au moyen des éléments météorologiques seuls, et de se servir de la réfraction ainsi calculée à la place de celle que la théorie, soit de Ivory, soit une autre, nous fournit. La réponse à cette question ne peut être qu'affirmative; en effet la valeur de la réfraction que donne la formule (*d*) est déduite de la formule (*b*) qui est une intégrale exacte satisfaisant à la constitution réelle de l'atmosphère terrestre, tandis que toute autre valeur de la réfraction ne satisfait qu'à l'atmosphère fictive. Les observations données plus haut confirment pleinement cette conclusion. Pour la rendre plus évidente nous avons dressé le tableau donné ci-dessus; d'après ce tableau on pourra se convaincre que la formule (*d*) est très propre à évaluer la réfraction en la donnant sensiblement plus exacte que celle qui serait fournie par la théorie.

La première colonne de ce tableau donne la réfraction observée en la déduisant de la formule

$$r = c - \theta + \theta'$$

c étant égal, pour les observations dont il s'agit, à 0°25'44",53; dans la seconde colonne nous avons inséré la réfraction r_1 calculée à l'aide de la formule (*d*); la troisième contient la réfraction théorique r_2 déduite de l'hypothèse de Ivory. Pour juger de l'erreur ré-

sultant de l'application des formules (*a*) et (*a'*) au calcul de la différence de niveau, nous avons mis la valeur des quantités $\frac{q-q'}{2}$ et $\frac{r-r_1}{2}$ respectivement dans la quatrième et dans la cinquième colonne. Pour obtenir la valeur exacte de la différence des réfractions q et q' il était nécessaire d'avoir la valeur exacte de la hauteur h. Cette dernière valeur est connue: MM. Baeyer et *v.* Hesse, en intercalant trois stations intermédiaires entre Kupferkuhle et Brocken ont trouvé $h=498{,}155$ toises. Cependant pour les observations que nous considérons, nous ne supposons pas que cette valeur h soit connue; il est évident que le calcul de la réfraction r_1 n'exige pas que h soit connue avec la dernière exactitude, donc nous nous sommes servis de la valeur approximative 498,8 résultant des mesures des distances zénithales réciproques θ et θ' données plus haut. Comme il ne s'agit que de trouver r_1 avec approximation d'une seconde près, en remarquant que l'erreur s'élevant à une seconde est fort au dessous de celle qui résulte de la supposition $\frac{q-q'}{2}=0$, nous aurions pu nous contenter aussi de la valeur h moins exacte.

	Réfr. obser. r	Réfr. calc. r_1	Ivory. r_2	$\frac{q-q'}{2}$	$\frac{r-r_1}{2}$
1	322″,2	310″,6	270″,1	+ 23″,3	+ 5 ,6
2	308 ,2	277 ,5	261 ,4	20 ,6	+ 15 ,4
3	264 ,1	258 ,6	256 ,1	15 ,9	+ 2 ,8
4	244 ,4	246 ,7	255 ,2	5 ,1	— 1 ,2
5	225 ,0	239 ,9	252 ,4	4 ,7	— 7 ,5
6	202 ,0	226 ,7	249 ,6	7 ,0	— 12 ,4
7	202 ,1	214 ,0	247 ,7	5 ,9	— 6 ,0
8	200 ,4	208 ,7	246 ,4	6 ,2	— 4 ,1
9	200 ,0	208 ,5	246 ,4	5 ,8	— 4 ,3
10	208 ,3	209 ,5	246 ,7	6 ,4	— 0 ,6
11	214 ,3	207 ,7	247 ,3	6 ,2	+ 3 ,3
12	223 ,9	204 ,1	248 ,2	+ 6 ,3	+ 9 ,9

Un simple regard sur les nombres contenus dans la quatrième et dans la dernière colonne nous montre que la quantité $q-q'$ est de même ordre que l'erreur $r-r_1$ de la réfraction tirée de la formule (*d*); cependant il faut ajouter que la première quantité conserve le même signe, ce qui se remarque dans la plupart des observations des distances zénithales réciproques, tandis que le signe de $r-r_1$, dans les observations que nous considérons, a varié. A quoi faut-il attribuer cette variation du signe de la quantité $r-r_1$? quant à présent il est difficile d'en trouver une explication positive. On pourrait supposer, ou que les instruments météorologiques, et surtout le thermomètre, ont été influencés par des causes locales, l'erreur d'un degré dans la différence de température des deux couches aériennes extrêmes produisant l'erreur de 10″ dans la valeur de r_1, ou que les couches diverses ont dévié continuellement de leur état d'équilibre.

L'inexactitude de la réfraction calculée r_1 et la différence $q-q'$ des réfractions relatives aux deux extrémités de la trajectoire décrite par le rayon lumineux, agissent sur la hauteur cherchée h dans le même sens, quand on est obligé de calculer h à l'aide des distances zénithales θ, à défaut d'observations réciproques et simultanées. L'erreur qui en résulte s'élève à

$$-s \operatorname{tg} \left(\frac{q-q'}{2}+\frac{r-r_1}{2}\right).$$

Pour les observations réciproques cette erreur est

$$-s \operatorname{tg} \left(\frac{q-q'}{2}\right),$$

par conséquent la première erreur restant de même ordre que la seconde, est plus variable que cette dernière.

De tout ce qui précède, on doit conclure que la détermination de la réfraction totale, effectuée à l'aide des observations météorologiques simultanées, dans le cas où il est impossible de se procurer des observations géodésiques réciproques et simultanées, présente de

grands avantages sur la détermination théorique, et nous croyons que nous sommes en droit de recommander le procédé exposé à l'attention de ceux qui s'occupent du nivellement géodésique. Si l'installation des instruments météorologiques sur le point à mesurer rencontre quelques difficultés, on peut les placer sur un autre point plus accessible mais convenablement choisi. La réfraction trouvée pour ce dernier point, servira à calculer la réfraction respective à d'autres points, en supposant que la réfraction croisse à raison de la distance du point observé à l'observateur.

Après cette digression reprenons notre question principale de la variabilité de la réfraction. Nous avons fait observer plus haut que la réfraction terrestre est sujette à des variations si grandes qu'aucune théorie n'est suffisante pour les expliquer. Si nous comparons les réfractions observées pendant un jour à celles que la théorie nous donne, il nous est impossible de rendre compte de leurs divergences par la variation de température de l'air. Dans les observations données plus haut, qui se rapportent au nivellemenf effectué par M. Baeyer et v. Hesse, la réfraction observée a varié dans un jour, de 122″,2 en tombant de 322″,2 à sa valeur minimum 200″,0. La théorie de Ivory ne reproduit, pour maximum et pour minimum, que 270″,1 et 246″,4. Pour faire disparaitre la différence entre ces résultats il aurait fallu que le paramètre f variât entre les limites 0,024 et 0,502. Cela aurait dû entrainer, comme conséquence, que le décroissement de température dans l'atmosphère, dans un espace de temps comparativement très court, changeât très vite à partir de sa valeur presque nulle, jusqu'à la valeur double par rapport à celle qui est relative à l'atmosphère moyenne de Ivory. Evidemment des variations si fortes sont entièrement inadmissibles.

6. La détermination théorique de la distribution de la chaleur dans l'atmosphère terrestre n'a pas été jusqu'à présent soumise aux recherches sérieuses qu'exige l'importance de la question. Certainement cette question est très compliquée, lorsqu'on veut la traiter

dans toute sa généralité, et particulièrement quand on veut prendre en considération l'influence de la vapeur d'eau qui existe dans l'air, et dont la quantité et la distribution changent suivant des lois fort peu étudiées. L'air atmosphérique, en le supposant parfaitement sec, est doué par rapport aux rayons caloriques d'un pouvoir absorbant très faible, tandis que cet air contenant de la vapeur d'eau, dans une proportion plus ou moins grande, perd très vite cette propriété et il absorbe la plus grande partie de la chaleur rayonnante émise, soit par le soleil, ou par le sol échauffé par l'action directe du soleil. Cette diversité du pouvoir absorbant de l'air par rapport aux rayons caloriques, variant continuellement selon les circonstances que l'on doit regarder comme accidentelles, échappe à toute analyse; cependant elle trouble excessivement la loi de continuité de l'abaissement de température. Il n'est pas rare de trouver la température presque constante dans une grande étendue de l'atmosphère, quoique cette anomalie ne soit pas accusée par les observations météorologiques faites à la surface de la terre, et que la transparence n'en soit pas sensiblement altérée.

Dans tout ce qui va suivre nous ferons abstraction de toutes les causes qui pourraient troubler le décroissement de température, et nous supposerons qu'il s'agit de déterminer la loi de ce décroissement dans l'atmosphère dépourvue de la vapeur d'eau, et que les couches inférieures qui touchent à la surface de la terre ne peuvent que s'échauffer par le contact immédiat avec le sol, ou du moins ne peuvent se refroidir, ce qui arrive très souvent pendant les nuits calmes et sereines de l'été.

Dans la théorie mécanique de la chaleur on démontre que la partie de la chaleur qui produit le travail externe est toujours proportionnelle à ce dernier, de sorte que, pour un gaz parfait pour lequel la loi de Gay-Lussac et de Mariotte a lieu, la chaleur ajoutée à l'unité de poids se divise en deux parties: l'une est consommée pour élever la température, et l'autre se transforme en travail externe. Soient v le volume de l'unité de poids du gaz permanent,

p la pression sous laquelle il se trouve, T la température absolue, C une constante, on a

$$p\,v = C\,T.$$

Si nous appelons E l'équivalent mécanique de la chaleur, Q la quantité de la chaleur consommée, C_0 la capacité calorique à volume constant, nous aurons, pour la valeur de la chaleur élémentaire dQ consommée par l'unité de poids d'un gaz dont la température, le volume et la pression varient à la fois, l'expression suivante:

$$dQ = C_0\,dT + \frac{p\,dv}{E}. \qquad (24)$$

Des trois variables T, v et p qui entrent dans la valeur de dQ l'une peut être éliminée à l'aide de la loi de Gay-Lussac et de Mariotte, d'où il suit que la quantité Q doit être regardée comme une fonction de deux variables indépendantes. Si l'on y élimine T, et que l'on désigne par C_1 la capacité calorique à pression constante, on obtient

$$C\,dQ = C_1\,p\,dv + C_0\,v\,dp. \qquad (25)$$

La quantité C_1 se trouve directement par l'expérience; d'après celle de M. Regnault C_1, pour l'air atmosphérique, est égal à 0,2377 la quantité de chaleur qui est nécessaire pour échauffer de 1 degré le même poids d'eau étant prise pour unité. Cette unité, dite calorie, produit le travail $E=425$ kilogrammètres, lorsqu'on prend le kilogramme et le mètre pour unités. La valeur de C_1 étant connue, celle de C_0 se déduira aisément à l'aide de la formule

$$C_0 = C_1 - \frac{C}{E},$$

dans laquelle la valeur de $C=7990\,\beta$, où β désigne le coefficient de la dilatation de l'air, est connue.

La formule (24) donne, par un calcul simple, la quantité de chaleur Q exprimée en calories, lorsqu'on connaît le travail externe et la température initiale et finale du gaz; en général elle donnera l'une de ces trois quantités, lorsque les deux autres sont données.

Cette même formule (24) nous montre que le travail élémentaire $p\,dv$ est produit par l'excés de l'énergie calorique entière EQ sur celle qui est dépensée pour échauffer le gaz à une certaine température. Soit Q_0 cette dernière quantité de chaleur, et EQ_0 l'énergie calorique correspondante, on aura $E(Q-Q_0)p\,dv$ pour la valeur du moment virtuel respectif.

Quand le gaz n'est pas libre de se dilater et de produire le travail externe, toute la chaleur Q que le gaz reçoit, sera dépensée pour augmenter la température sous un volume constant, et par cela même pour accroître sa force élastique; le moment virtuel correspondant à ce dernier cas, aura la valeur $EQ\,v\,dp$. Evidemment Q et Q_0 peuvent être des quantités quelconques dépendantes des éléments p et v.

Cela posé, concevons l'unité de poids de l'air atmosphérique faisant équilibre avec l'air environnant, et supposons qu'on y ajoute une quantité Q de la chaleur. Soient p la pression, v le volume de l'air que nous considérons, et qu'à partir de cet état, l'équilibre soit troublé, et que l'air en se dilatant d'une quantité infiniment petite dv donne du travail externe produit par la force élastique $E(Q-Q_0)$. Pour que l'équilibre, à chaque instant, soit rétabli, il est nécessaire que la détente de l'air soit compensée par la perte d'une partie de son élasticité, ce qui exige que la somme des moments virtuels $E(Q-Q_0)p\,dv$ et $EQ\,v\,dp$, abstraction faite des signes, soit nulle. On aura donc

$$(Q-Q_0)\,p\,dv+Q\,v\,dp=0,$$

ensuite

$$Q\,d(p\,v)-Q_0\,p\,dv=0. \qquad (26)$$

Cette équation donnerait la relation entre les quantités p et q dès qu'on aurait déterminé Q et Q_0 en fonction de ces deux variables, et l'on trouverait la température T, soit en fonction de la variable p, soit de la variable v, en éliminant l'une de ces variables à l'aide de la loi de Gay-Lussac, et de Mariotte.

La détermination de la valeur exacte de Q et de Q_0 étant impossible, nous nous contenterons d'en trouver la valeur approximative correspondante à l'atmosphère terrestre parfaitement diaphane pour les rayons caloriques. Dans cette hypothèse la source unique de la chaleur Q gagnée par diverses couches atmosphériques se réduira à la chaleur de la surface du sol qui peut devenir vivement échauffé par l'action directe de la chaleur solaire. Les couches inférieures, par leur contact avec la surface du sol échauffé, absorbant progressivement de la chaleur, et par cette cause devenant plus légères que les couches subséquentes, donneront naissance à des courants ascendants et descendants. En traversant les couches successivement plus élevées, cet air y trouve les densités plus faibles, donc il se dilate peu à peu; une partie de la chaleur gagnée devient latente, tandis que l'autre est rendue à ces couches ou dispersée par le rayonnement vers les régions supérieures. Le mouvement des courants ascendants et descendants, continuant indéfiniment, doit se ralentir progressivement, pour former l'équilibre stable des couches atmosphériques, dès que leur densité approche de celle qui est relative à la hauteur à laquelle elles se trouvent. Nous pouvons faire abstraction de la chaleur perdue par le rayonnement, parce que cette perte est la plus grande, quand l'air est surchauffé ce qui n'a lieu qu'à la surface de la terre; donc nous arrivons à la conclusion que la chaleur Q est consommée à la surface de la terre sous la pression constante y correspondante que nous désignons par p_0, et que cette chaleur est dépensée en tout pour l'expansion successive de l'air dans son trajet, en partant du volume v_0 correspondant à la pression p_0, pour arriver au volume final v.

Pour déterminer la valeur de la chaleur Q on doit faire, dans la formule (25), $p = p_0$, et en regardant cette quantité comme une constante, intégrer cette formule. L'intégration nous donne

$$Q = \frac{C_1}{C} p_0 (v - v_0).$$

La chaleur Q_0 consommée sous un volume constant se déduira de la formule (24) en y posant $p\,dv = 0$. D'après ce qui a été dit

plus haut cette chaleur n'est absorbée qu'à la surface de la terre; donc si nous désignons par T_0 la température de la couche inférieure de l'air nous aurons

$$Q_0 = C_0 (T - T_0).$$

Nous admettons ici que la différence $T - T_0$ est positive, par la raison que, dans la formule (26), les variations dv et $d(pv)$ sont censées positives.

En mettant les valeurs de Q_0 et Q dans la formule (26) on trouve, après y avoir remplacé $d(pv)$ par sa valeur $C\,dT$,

$$C_1 p_0 (v - v_0)\,dT - C_0 (T - T_0)\,p\,dv = 0.$$

Mais on a

$$\frac{pv}{p_0 v_0} = \frac{T}{T_0}$$

par conséquent

$$C_1 \frac{v}{v_0}\frac{T_0}{T}(v - v_0)\,dT - C_0 (T - T_0)\,dv = 0,$$

ensuite

$$C_1 \frac{T_0}{T}\frac{dT}{(T - T_0)} = C_0 \frac{v_0\,dv}{v(v - v_0)}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{C_1}{C_0} = \gamma$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 - x$$

$$\frac{v_0}{v} = 1 - \omega,$$

nous aurons

$$\gamma\,d\log x = d\log\omega.$$

En intégrant et en désignant par N une quantité arbitraire nous obtiendrons

$$x = N\omega^{\frac{1}{\gamma}},$$

ensuite

$$1 - \frac{T_0}{T} = N\omega^{\frac{1}{\gamma}}.$$

On peut éliminer la quantité N lorsqu'on connaît la température τ relative à $\omega = 1$; dans ce cas, l'élimination nous donne

$$1 - \frac{T_0}{T} = \left(1 - \frac{T_0}{\tau}\right) \omega^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Prenons maintenant les températures comptées à partir de la température de la glace fondante, et désignons les respectivement par t_0, t et τ_0 nous aurons

$$T = \frac{1}{\beta} + t$$

$$T_0 = \frac{1}{\beta} + t_0$$

$$\tau = \frac{1}{\beta} + \tau_0$$

ce qui nous conduit à la formule suivante:

$$\frac{1 + \beta t}{1 + \beta t_0} = \frac{1}{1 + \frac{\beta (t_0 - \tau_0)}{1 + \beta \tau_0} \omega^{\frac{1}{\gamma}}}. \qquad (27)$$

Telle est la formule à laquelle doit satisfaire la loi du décroissement de température dans l'atmosphère entièrement dépourvue de la vapeur d'eau, et ne recevant de la chaleur que de la couche adjacente à la surface de la terre. Cette loi doit se régulariser d'après la température t_0 observée dans la couche inférieure de l'air et de la température τ_0 relative à la couche extrême. Il n'existe aucune raison de supposer que τ_0 puisse varier, on doit donc la regarder comme constante pour toutes les saisons de l'année. Mais la température t_0 variant continuellement doit donner des valeurs très différentes du décroissement $t_0 - t$ correspondantes aux différentes saisons de l'année.

Dans cette formule ω exprime la diminution de la densité de l'air, celle de la couche inférieure étant prise pour unité. Quant à la quantité γ elle est connue parce qu'elle désigne le rapport de la capacité calorique à pression constante à la capacité à volume constant. L'observation donne $\gamma = 1{,}4$, et c'est cette valeur dont nous nous servirons dans la suite.

Nous allons maintenant comparer la formule (27) au décroissement de température que nous fournit l'observation. Cependant il ne faut pas oublier que la formule en question est déduite dans l'hypothèse que l'atmosphère terrestre soit parfaitement diaphane pour la chaleur, et qu'il n'existe aucune cause qui puisse troubler cet état normal, par conséquent nous devons nous borner aux observations qui ont été faites par un temps clair, en rejetant celles qui se rapportent à l'atmosphère chargée de nuages. Les observations faites en aérostats doivent occuper le premier rang, étant moins affectées des erreurs que peut produire l'influence locale et particulièrement l'échauffement anormal des couches aériennes par le sol.

Les observations de M. Glaisher exécutées avec tant de succés fournissent des matériaux très riches pour l'étude de l'atmosphère terrestre (1). M. Glaisher partage toutes les observations en deux groupes: l'un embrassant toutes ses ascensions aérostatiques qui ont eu lieu dans l'atmosphère dégagée de nuages, quand l'air était calme et le ciel serein, et l'autre se rapportant à l'atmosphère chargée de nuages en partie, ou en totalité. C'est le premier groupe qui doit nous intéresser particulièrement par son application directe à la théorie de la réfraction astronomique, ainsi nous ne tenons aucun compte des observations appartenant au second groupe. Pour en déduire plus sûrement la marche de température dans les différentes hauteurs, M. Glaisher eut recours à la méthode graphique ayant en vue d'éliminer les erreurs fortuites où celles qui pourraient tenir aux courants d'air inégalement échauffé. Nous n'y entrons dans aucun détail parce que le lecteur pourra les trouver dans l'ouvrage cité plus haut. Le tableau qui suit contient les hauteurs barométriques calculées à l'aide de la formule de Laplace, et les différences de température $t_0 - t$, t_0 étant la température observée au niveau de la mer. Tous ces nombres sont empruntés,

(1) The report of the British Association for the advancement of science, 1862, 1863, 1864.

sans aucun changement, de „Report of the British Association 1864, p. 277; cependant, l'indication du baromètre nous étant indispensable pour en tirer la valeur de ω, nous avons ajouté la colonne donnant la pression barométrique (1). Cette pression est exprimée en pouces anglais et les hauteurs correspondantes en pieds anglais. Quant à la différence $t_0 - t$ de température, elle est donnée en degrés de Fahrenheit. Il est évident que la formule de Laplace, comme dérivant de l'hypothèse sur le décroissement de température assez éloigné de la vérité, ne pouvait donner des valeurs justes, on doit donc regarder les hauteurs comprises dans la première colonne comme approximatives. Au reste nous ne ferons aucun usage de ces hauteurs.

La formule (27) présentée comme il suit:

$$\frac{1+\beta t}{1+\beta t_0} = \frac{1}{1+k\,\omega^{\frac{1}{\gamma}}} \qquad (28)$$

exige que l'on y ait déterminé la valeur de la quantité k qui, d'ailleurs est variable, en variant avec la température t_0 observée dans la station inférieure. Dans le tableau suivant qui donne le décroissement moyen de température observé par M. Glaisher, la valeur de k a été trouvée à l'aide de l'observation correspondante à la plus grande hauteur atteinte par lui; nous en avons déduit

$$k = 0{,}1871$$

et cette valeur se rapporte à la température $t_0 = 62°F$ que nous avons déduite des mêmes observations qu'on a citées plus haut. Il est nécessaire de remarquer que les observations correspondantes à des hauteurs petites étaient beaucoup plus nombreuses que celles relatives à des hauteurs considérables, par cette raison la température $t_0 = 62°F$ ne se rapporte qu'à ces dernières.

(1) La pression moyenne barométrique p est tirée des observations suivantes: 1862, Juillet 30, Août 18, Septembre 5; 1863 Mars 31, Avril 18, et 1864 Août 29.

	Hauteur.	Pression barométrique.	Décroissement de température observé.	calculé.	Erreur de la formule.
	0	30^{p} ,04	0°,0	0°,0	0°,0
1	1000	29 ,05	6 ,2	6 ,2	0 ,0
2	2000	28 ,01	10 ,9	10 ,9	0 ,0
3	3000	27 ,02	14 ,7	14 ,8	— 0 ,1
4	4000	26 ,07	18 ,0	18 ,3	— 0 ,3
5	5000	25 ,10	20 ,9	21 ,6	— 0 ,7
6	6000	24 ,14	23 ,5	24 ,9	— 1 ,4
7	7000	23 ,26	26 ,0	27 ,6	— 1 ,6
8	8000	22 ,41	28 ,7	30 ,2	— 1 ,5
9	9000	21 ,56	31 ,2	32 ,6	— 1 ,4
10	10000	20 ,72	33 ,6	35 ,0	— 1 ,4
11	11000	19 ,97	35 ,6	37 ,1	— 1 ,5
12	12000	19 ,22	37 ,9	39 ,1	— 1 ,2
13	13000	18 ,45	40 ,1	41 ,1	— 1 ,0
14	14000	17 ,74	42 ,1	42 ,9	— 0 ,8
15	15000	17 ,13	43 ,8	44 ,5	— 0 ,7
16	16000	16 ,47	46 ,0	46 ,1	— 0 ,1
17	17000	15 ,88	47 ,9	47 ,5	+ 0 ,4
18	18000	15 ,30	49 ,6	48 ,9	+ 0 ,7
19	19000	14 ,67	51 ,1	50 ,5	+ 0 ,6
20	20000	14 ,16	52 ,4	51 ,7	+ 0 ,7
21	21000	13 ,58	53 ,6	53 ,1	+ 0 ,5
22	22000	13 ,14	54 ,7	54 ,1	+ 0 ,6
23	23000	12 ,59	55 ,7	55 ,4	+ 0 ,3
24	24000	11 ,94	57 ,0	56 ,9	+ 0 ,1
25	25000	11 ,44	58 ,1	58 ,1	0 ,0
26	26000	10 ,97	59 ,1	59 ,2	— 0 ,1
27	27000	10 ,56	60 ,1	60 ,1	0 ,0
28	28000	10 ,16	61 ,0	61 ,0	0 ,0
29	29000	9 ,75	61 ,8	61 ,9	— 0 ,1

On voit par ce tableau que la formule théorique (28) représente, avec une approximation suffisante, le décroissement de température qui a lieu dans les couches inférieures et dans celles qui se rapportent aux hautes régions de l'atmosphère. L'erreur de la formule commence à se faire sentir à la hauteur de quatre mille pieds, en augmentant, à partir de cette hauteur, elle devient bientôt à peu près constante pour toutes les couches atmosphériques dans lesquelles les nuages se forment ordinairement. Peut on expliquer le

signe négatif prédominant dans ces couches par le dégagement de la chaleur latente de la vapeur d'eau qui passe à l'état liquide, ou par l'absorption de la chaleur solaire par ces couches? c'est une question à laquelle on ne peut répondre affirmativement que par les observations faites dans des contrées moins humides que celle d'Angleterre. Il faut encore remarquer que le décroissement de température donné par M. Glaisher est déduit d'un nombre très inégal d'observations: celui qui se rapporte aux hauteurs moins élevées est trouvé à l'aide d'un grand nombre d'observations, tandis que le décroissement relatif aux grandes hauteurs n'est donné que par des observations comparativement peu nombreuses. Comme l'une et l'autre série, n'étant pas simultanées, se rapportent à des températures différentes pour lesquelles la valeur de k ne pouvait être la même, il est donc visible qu'il doit toujours exister quelque incertitude dans la différence entre l'abaissement moyen de température calculé et celui qui est donné par M. Glaisher. On pourrait objecter que la loi du décroissement de température dans l'atmosphère pourrait être modifiée sensiblement pendant les ascensions aérostatiques de M. Glaisher jusqu'à rendre la valeur de la quantité γ différente de celle qu'on lui attribue ordinairement, et qu'une autre valeur de γ que celle que nous avons adoptée affaiblirait l'erreur de la formule (28). Il est facile de se convaincre, que cela n'a pas lieu, en calculant l'abaissement de température dans les deux hypothèses: $\gamma = 1{,}3$ et $\gamma = 1{,}5$; le calcul conduit effectivement à des erreurs plus grandes.

En posant

$$\frac{\beta \tau_0}{1 + \beta \tau_0} = -\varepsilon$$

on a

$$k = \varepsilon + (1 + \varepsilon)\beta t_0;$$

la quantité k étant égale à 0,1871 quand $t_0 = 62°F$, on aura $\varepsilon = 0{,}1188$, par conséquent

$$k = 0{,}1188 + 1{,}1188\,\beta t_0.$$

Cette expression de k fait voir que la valeur de k varie fort sen-

siblement dès que la température t_0 observée à la surface de la terre a varié de plusieurs degrés. Le coefficient thermométrique $1{,}1188\,\beta\,t_0$ dont dépend la valeur de la quantité k joue un rôle très important dans la théorie des réfractions astronomiques, il est donc nécessaire d'en prouver la validité par d'autres observations, que celles de M. Glaisher. Dans ce but nous examinerons les observations qui, pour certaines causes particulières, nous seront utiles.

L'ascension aérostatique de Gay-Lussac a été regardée jusqu'à présent comme une des plus importantes, et par cette raison les observations météorologiques que nous a fournies cette ascension ont été calculées par divers savants.

On sait que Gay-Lussac traversa rapidement les premières couches de l'atmosphère ce qui ne lui a permis de faire les observations nécessaires qu'à partir de la hauteur de 9950 pieds anglais. Ce manque d'observations relatives aux couches inférieures est une perte regrettable d'autant plus que le voyage aérostatique de Gay-Lussac est, juqu'à présent, le seul, où la température observée à la surface de la terre ait été très élevée.

A la hauteur de 9950 pieds, Gay-Lussac trouva la température 12,5 degrés centigrades; la température de l'air à la surface de la terre étant 30,75 degrés on aura $18°,25\,C$, ou $32°,85\,F$, pour le décroissement respectif à la hauteur de près de 10000 pieds. D'après les observations de Glaisher on a $33°,6$ ce qui s'accorde parfaitement avec le résultat précédent; mais on doit observer que la valeur de k relative aux observations de Gay-Lussac est plus grande que celle qui a été déduite des observations de Glaisher, donc on aurait dû s'attendre à ce que l'abaissement de température observé par Gay-Lussac était plus rapide. Il paraît que l'espace de l'atmosphère traversé par Gay-Lussac eut été anormalement échauffé ce qui se remarque non seulement par la marche de l'indication du thermomètre, mais par celle de l'hygromètre. En effet l'hygromètre, au lieu de donner l'humidité de l'air plus faible à mesure

que la ballon s'élevait, montrait l'humidité croissante jusqu'à la hauteur de 10000 pieds, et de là l'humidité décroissait rapidement pour devenir ensuite presque constante. A la plus grande irrégularité de l'hygromètre dans la couche atmosphérique entre 10000 et 15000 pieds correspond une irrégularité fort sensible de la température observée par Gay-Lussac. Quoique cette circonstance et le manque des observations relatives aux couches inférieures dont l'étude aurait été très intéressante, diminuent de beaucoup l'importance du voyage aérostatique de Gay-Lussac, cependant d'un autre côté il gagne en ce que la valeur respective de k est très différente de celle qui se rapporte aux observations de Glaisher. Pour ces dernières on avait $k=0{,}1871$, tandis que pour les premières on a $k=0{,}2448$; l'augmentation de la valeur de k s'élevant à 0,0577, ou à un tiers à peu près de la valeur $k=0{,}1871$ devait produire une augmentation très marquée de l'abaissement de la température observé par Gay-Lussac.

Dans le tableau suivant nous donnons les résultats tirés des observations de Gay-Lussac qui se rapportent aux couches aériennes les plus élevées.

Hauteur.	Baromètre.	Température observée.	Température calculée.	Erreur de la formule.
0	675,68	+ 30°, 75		
20157	367,0	— 3 ,25	— 6,37	+ 3,12
22586	333,9	— 7 , 0	— 8,63	+ 1,63
22892	328,8	— 9 , 5	— 8,97	— 0,53

$k = 0{,}2448.$

L'erreur de la formule s'éleverait respectivement à $-5{,}6$, $-7{,}4$, $-8{,}6$ degrés si l'on supposait que la valeur de k ne changeât pas, c'est-à-dire, qu'elle restât telle quelle était pour l'observation moyenne de Glaisher. Il est donc évident que l'erreur de la formule (28) s'affaiblit considérablement en tenant compte de la variation de k.

L'ascension du Grand-Ararat exécutée en 1850, sous la direction de M. Chodzko (1), présente presque le même intérêt, par rapport à la valeur de k, que le voyage en aérostat de Gay-Lussac. Les observations météorologiques sur la cime de la montagne ont eu lieu pendant quatre jours consécutifs au mois d'Août. On a fait, en outre, des observations dans différents endroits de la Transcaucasie à différentes hauteurs comparativement peu élevées, et par cette raison nous les laissons de côté. Pour la température de l'air au niveau de la mer, et pour la valeur de la pression barométrique correspondante nous nous servons de la moyenne des quantités observées simultanément à Lenkoran sur la mer caspienne et à Redoute-Kalé sur la mer noir; le Grand-Ararat est à mi-chemin à peu près entre ces deux lieux. Le baromètre réduit à la température de la glace fondante est exprimé en pouces anglais, et la température de l'air en degrés centigrades. Le tableau suivant contient les observations dont nous parlons

	Lenkoran		Redoute-Kalé		Grand-Ararat	
	Barom.	Therm.	Barom.	Therm.	Barom.	Therm.
19 Août	30,088	24,62	29,874	23,10	16,173	— 9,42
20 »	30,170	24,79	30,006	23,03	16,207	— 5,02
21 »	30,273	25,55	29,998	23,94	16,276	— 3,15
22 »	30,086	24,46	29,882	27,00	16,266	— 3,46

En prenant la moyenne des observations faites à Lencoran et à Redoute-Kalé et en calculant, d'après cette dernière valeur de la température et de la hauteur du baromètre, la valeur de la quantité k, ensuite en tirant, de celle-ci et des observations exécutées sur la cime de Grand-Ararat, l'abaissement de température on trouvera les résultats qui sont contenus dans le tableau suivant:

(1) Mém. de l'académie des sciences de S. Petersburg. 1850.

	k	Abaissement de température observé.	Abaissement de température calculé.	Erreur de la formule.
19 Août	0,2166	33,3	30,0	—3,3
20 »	0,2168	28,9	30,1	+1,2
21 »	0,2203	27,9	30,4	+2,5
22 »	0,2243	29.2	31,0	+1,8

L'accord assez satisfaisant entre le calcul et l'observation confirme l'exactitude de la valeur de k.

Les observations que nous avons comparées avec la formule (28) ne se rapportent qu'aux mois d'été et à des contrées maritimes, c'est-à-dire à des climats plus ou moins humides où l'atmosphère, le plus souvent, possède un pouvoir absorbant assez fort pour les rayons caloriques. Il serait donc à désirer que l'on ait des observations de l'abaissement de température dans l'atmosphère au milieu de grands continents et particulièrement pour les amplitudes suffisamment larges de t_0. De pareilles observations s'étendant à des températures de l'air assez basses seraient très importantes pour l'étude de l'atmosphère terrestre ; alors on pourrait obtenir la valeur de la température relative à l'espace céleste τ_0. Jusqu'à présent on a supposé que cette température était le zéro absolu, ou au moins très basse, et beaucoup plus basse qu'on ne la trouve à la surface de la terre. Mais il paraît qu'elle est bien modérée et, peut-être, qu'elle ne dépasse pas même cinquante degrés centigrades au-dessous de la température de la glace fondante. Pour arriver à un résultat plus sûr pour la limite de température correspondante aux couches supérieures de l'atmosphère on doit effectuer quelques ascensions en aérostats pendant l'hiver par un temps clair et dans des contrées situées au milieu d'un continent. De telles ascensions ne devraient pas être difficiles parce que l'atmosphère, pendant les froids d'hiver, reste calme et que l'abaissement de température relatif à des hauteurs considérables ne pourrait être que fort petit.

Pour ne négliger rien qui puisse concourir à démontrer que la formule théorique (28) exprime effectivement la loi de température dans l'atmosphère terrestre, nous calculerons les observations météorologiques faites simultanément à Genève et sur le mont Saint-Bernard. On peut faciliter le calcul de telles observations en remarquant que la formule (28) peut être développée en série convergente lorsque la différence de niveau de deux points d'observation s'élève à quelques centaines de mètres. En effet en posant

$$1-\frac{1+\beta t}{1+\beta t_0}=x$$

on trouvera

$$x=\frac{k\,\omega^{\frac{1}{\gamma}}}{1+k\,\omega^{\frac{1}{\gamma}}}=k\,\omega^{\frac{1}{\gamma}}-k^2\,\omega^{\frac{2}{\gamma}}+\ldots$$

Comme la quantité $k\omega^{\frac{1}{\gamma}}$ est toujours très petite la série précédente sera très convergente, et il suffira de se borner aux deux premiers termes pour en déduire la valeur de x, et ensuite celle de la différence t_0—t avec l'approximation à un dixième de degré.

Dans la formule précédente la quantité ω dépend de la valeur de x et de celle du rapport des deux pressions barométriques p et p_0. En négligeant la variation de la gravité avec la hauteur on a

$$\omega=1-\frac{p}{p_0}\frac{1+\beta t_0}{1+\beta t}=1-\frac{p}{p_0}\frac{1}{1-x}.$$

Si l'on met cette valeur dans l'équation précédente, et que l'on en détermine la valeur de x en faisant $\gamma=\frac{7}{5}$, on trouve

$$x=k\left(1-\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{5}{7}}-k^2\left\{\left(1-\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{10}{7}}+\frac{5}{7}\left(1-\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{3}{7}}\frac{p}{p_0}\right\}+\ldots$$

Soient

$$M=\left(1-\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{5}{7}}$$

$$N=\left(1-\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{10}{7}}+\frac{5}{7}\left(1-\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{3}{7}}\frac{p}{p_0}; \qquad (29)$$

en mettant pour k sa valeur on obtient, pour $\beta(t_0 - t)$, l'expression suivante:

$$\beta(t_0 - t) = M[\varepsilon + (1+\varepsilon)\beta t_0](1+\beta t_0) - N[\varepsilon + (1+\varepsilon)\beta t_0]^2 (1+\beta t_0) + \ldots$$

La quantité ε ainsi que β étant très petite on peut se borner au carré de cette dernière quantité, et nous aurons pour $t_0 - t$ la valeur suivante:

$$t_0 - t = \frac{\varepsilon}{\beta} M \left\{ 1 + \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon} \beta t_0 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \beta^2 t_0^2 \right\}$$
$$- \frac{\varepsilon^2}{\beta} N \left\{ 1 + \frac{2+3\varepsilon}{\varepsilon} \beta t_0 + \left(\frac{1+4\varepsilon+3\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) \beta^2 t^2 \right\}. \quad (30)$$

Si l'on veut exprimer la différence $t_0 - t$ des deux températures correspondantes aux deux points d'observation en degrés centigrades on aura la formule suivante:

$$t_0 - t = 32^\circ,42\, M(1 + 0{,}0382\, t_0 + 0{,}000127\, t_0^2)$$
$$- 3^\circ,85\, N(1 + 0{,}0727\, t_0 + 0{,}001444\, t_0^2). \quad (31)$$

Cette formule très simple donnera la valeur de $t_0 - t$ lorsque la pression barométrique relative à chacune des deux stations est connue. La formule (29), dans ce cas, nous fournira la valeur de M et N. Nous avons exprimé la différence en question en fonction de la hauteur de la colonne barométrique, au lieu d'employer, dans ce but, la formule (28), par la raison que les quantités M et N qui ne dépendent que de cette hauteur, restent constantes, ou à peu près constantes pour toutes les saisons de l'année, tandis que la quantité ω dont dépend directement la valeur de $t_0 - t$, varie à cause de la variation de température de l'air. Au reste la formule (28) est plus correcte, et cette dernière formule (31) ne peut être appliquée que pour les observations simultanées exécutées sur des élévations moins considérables.

Nous appliquerons maintenant la formule (31) aux observations faites à Genève et à Saint-Bernard. La formule (31) suppose que la température t_0 relative au niveau de la mer soit connue; cepen-

dant il est plus simple d'éliminer préalablement cette quantité. Dans ce but nommons t' la température de Genève, t celle de St. Bernard, et remarquons que les hauteurs barométriques moyennes au niveau de la mer, à Genève et à St. Bernard sont respectivement 762,0, 727,5, 561,6 millimètres; en calculant M et N, ensuite les deux coefficients de la formule (31) nous obtiendrons

$$t_0 - t' = 3°,550(1+0,0382t_0+0,000127t_0^2) - 0°,743(1+0,0727t_0+0,001444t_0^2)$$

$$t_0 - t = 12,480(1+0,0382t_0+0,000127t_0^2) - 1,714(1+0,0727t_0+0,001444t_0^2).$$

En éliminant la quantité t_0 nous trouverons aisément l'expression suivante de la température t qui devait être observée à St. Bernard lorsque la température t' à Genève est supposée connue:

$$t = t' - 8°,78 - 0°,293\ t' + 0°,0003\ t'^2.$$

Pour comparer cette formule à l'observation nous empruntons à l'ouvrage de M. Schmidt(1) les températures moyennes mensuelles observées à Genève et à St. Bernard, et nous calculons la température à cette dernière station, pour en déduire l'erreur de la théorie. Le tableau qui suit contient les résultats du calcul et les quantités trouvées par l'observation.

	Tempér. observée à Genève.	Température à St. Bernard		Erreur de la formule.
		observée.	calculée.	
Janv.	— 0°,5	— 8°,6	— 9°,1	+ 0°,5
Févr.	+ 2 ,4	— 7 ,6	— 7 ,1	— 0 ,5
Mars	5 ,9	— 5 ,6	— 4 ,6	— 1 ,0
vril	11 ,0	— 2 ,6	— 1 ,0	— 1 ,6
Mai	16 ,7	+ 2 ,2	+ 3 ,1	— 0 ,9
Juin	19 ,8	4 ,9	5 ,3	— 0 ,4

(1) Karsten, Encyclopoedie, Lif. 6, p. 419.

Juillet	22°,1	6°,8	7°,0	— 0°,2
Août	22 ,1	6 ,8	7 ,0	— 0 ,2
Sept.	18 ,4	+ 3 ,8	+ 4 ,3	— 0 ,5
Oct.	12 ,1	— 0 ,5	— 0 ,2	— 0 ,3
Nov.	6 ,5	— 4 ,5	— 4 ,2	— 0 ,3
Déc.	+ 1 ,6	— 7 ,1	— 7 ,6	+ 0 ,5

Le tableau précédent montre que l'excès de la formule sur les observations, depuis le mois de Juin jusqu'au mois de Novembre, est, à peu de chose près, constant. Cela s'explique par la circonstance que dans cette moitié de l'année le ciel est, de préférence, serein, tandis que, dans l'autre moitié les irrégularités, deviennent plus manifestes, et la théorie ne peut prétendre à expliquer les variations de la température, comme étant fortement troublées pendant le temps nuageux. Si l'on suppose que l'influence locale sur la température d'un lieu soit d'autant moins sensible que ce lieu est plus élevé, on devra conclure que la température moyenne à Genève est devenue, par cette cause, trop forte de 0°,4 à peu près. Les observations que nous considérons seraient plus rapprochées de la théorie, si elles ne se rapporteraient qu'aux jours clairs.

Si la différence de niveau des deux points d'observation n'est pas considérable, et que les variations de la température observée à la station inférieure soient comprises dans des limites assez restreintes, on peut s'arrêter à la première puissance de t_0 et l'on aura simplement

$$t_0 - t = \frac{\varepsilon}{\beta}\left(1 - \frac{p}{p_0}\right)^{\frac{5}{7}} \left\{1 + \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\beta t_0\right\}.$$

Cette formule montre que la différence des deux températures t_0 et t, observées simultanément sur les deux points dont la hauteur relative n'est pas très grande, croît proportionnellement à la température t_0, et le coefficient de t_0, qui est $\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\beta$, est entièrement indépendant de cette hauteur. D'où il suit qu'en déterminant ce

coefficient directement au moyen des observations, on doit trouver toujours la même valeur, quelsque soient le lieu d'observation et la différence de niveau des deux points sur lesquels on a fait ces observations. Il paraît que cette formule exprime de très près la marche de température des deux lieux dont la distance réciproque n'est pas très grande. En effet en déterminant le coefficient $\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\beta$ à l'aide des observations bien connues de Saussure faites au Col-du-Géant élevé sur le niveau de Genève de 9660 pieds anglais et comparées aux observations respectives faites en ce dernier lieu j'ai trouvé

$$\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\beta = 0{,}042.$$

Les observations mensuelles, faites simultanément à Bonally et à Colington (1) dont la différence de niveau est petite, conduisirent au résultat

$$\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\beta = 0{,}032$$

Ces deux résultats ne s'éloignent que peu de la valeur théorique qui est égale à 0,0382.

Toutes les observations qne nous venons de comparer à la formule (28) montrent que cette formule exprime, en général, la loi de l'abaissement de température dans l'atmosphère terrestre; cependant il serait prématuré d'admettre que la valeur de $\varepsilon = 0{,}1188$ qui satisfait suffisamment bien aux observations d'été faites dans l'Europe occidentale pût être étendue aux contrées situées au milieu des grands continents. En calculant, à l'aide de cette valeur de ε, la réfraction astronomique, et en comparant cette dernière aux observations que j'ai faites, dans ce but, à Kasan, je me suis assuré que cette valeur exige une correction positive assez sensible. Certainement la réfraction astronomique dépendant particulièrement

(1) Karsten. Encyclopoedie l. c.

de la loi de densité des couches atmosphériques inférieures, est un moyen peu sûr pour en déduire la valeur juste de ε; ce sont les observations directes de l'abaissement de température qui pourraient décider la question affirmativement. Cette question est très importante non seulement pour la théorie de la réfraction astronomique relative à des climats continentaux, mais encore pour l'étude de la constitution de l'atmosphère terrestre. Ce sont des observations pareilles faites en hiver et en été, pendant un temps clair, qui pourraient nous fournir la valeur la plus probable de la quantité ε, dont on pourrait déduire, avec quelque confiance, la température de l'espace céleste. La valeur de ε que nous avons déduite des observations de M. Glaisher donne pour cette température la valeur $\tau_0 = -29°$ évidemment trop faible. La réfraction astronomique observée en été, à Kasan, exige qu'on l'augmente jusqu'à quarante cinq degrés; mais en tout cas il paraît très probable que cette température ne s'abaisse pas au dessous de cinquante degrés centigrades, d'où il s'ensuit que la température de l'espace céleste est capable de pénétrer jusqu'à la surface de la terre, contrairement à l'opinion admise jusqu'à présent. D'après Poisson cette température doit s'abaisser jusqu'à —273°, c'est-à-dire, jusqu'à ce que l'air atmosphérique dans sa limite extrême perde toute son élasticité. Une température si basse des couches dernières de l'atmosphère terrestre ne saurait être expliquée par des considérations théoriques, et certainement elle donnerait des résultats très différents de ceux qui ont été trouvés par M. Glaisher pour l'abaissement de température dans les hautes régions de l'atmosphère explorées assez souvent par lui.

7. La réfraction astronomique ne dépend de la loi de température dans les diverses couches atmosphériques que pour les hauteurs de l'astre assez petites. Pour la hauteur de 10° l'influence de cette loi ne se manifeste que par une quantité minime s'élevant à 0″,1, il est donc avantageux de calculer cette réfraction, jusqu'à cette hauteur, par une série, en s'arrêtant aux termes qui commencent à devenir sensibles par l'inégalité de température dans l'atmo-

sphère. Laplace a déduit une série qui jouit de l'avantage de ne dépendre d'aucune loi des densités des couches atmosphériques. Cette série peut servir pour calculer la réfraction jusqu'à la distance zénithale $\theta = 65°$. En y ajoutant les termes dépendants de cette loi, et qui peuvent être calculés facilement, nous obtiendrons une autre série qui sera fort utile pour calculer les réfractions depuis le zénith jusqu'à la distance zénithale $\theta = 80°$, et qui donnera la valeur exacte à 0″,01 près. Comme il importe beaucoup d'avoir un moyen simple de calculer la réfraction, nous nous occuperons préalablement de la déduction de la série dont il s'agit.

Si, dans la formule (2), on pose $\frac{h}{a} = s$, et que l'on développe cette formule en série suivant les puissances ascendantes de $\operatorname{tg}\theta$ on trouve facilement

$$r = A_1 \operatorname{tg}\theta - A_3 \operatorname{tg}^3\theta + A_5 \operatorname{tg}^5\theta - A_7 \operatorname{tg}^7\theta + A_9 \operatorname{tg}^9\theta - \ldots \qquad (32)$$

où, pour abréger, on a fait

$$A_1 = \alpha \int (1 - s + 3\alpha\omega + s^2 - 3\alpha\omega s + \frac{15}{2}\alpha^2\omega^2)\, d\omega$$

$$A_3 = \alpha \int (s - \alpha\omega - \frac{5}{2}s^2 + 6\alpha\omega s - 5\alpha^2\omega^2)\, d\omega$$

$$A_5 = \alpha \int (\frac{3}{2}s^2 - 3\alpha\omega s + \frac{3}{2}\alpha^2\omega^2 - 6s^3 + 18\alpha\omega s^2 - \frac{45}{2}\alpha^2\omega^2 s)\, d\omega$$

$$A_7 = \alpha \int (\frac{5}{2}s^3 - \frac{15}{2}\alpha\omega s^2 + \frac{15}{2}\alpha^2\omega^2 s - \frac{5}{2}\alpha^3\omega^3 - \frac{55}{4}s^4 + \frac{105}{2}\alpha\omega s^3)\, d\omega$$

$$A_9 = \alpha \int (\frac{35}{8}s^4 - \frac{35}{2}\alpha\omega s^3 + \frac{105}{4}\alpha^2\omega^2 s^2 - \frac{245}{8}s^5)\, d\omega.$$

On a conservé dans l'expression des coefficients $A_1, A_3 \ldots$ les termes qui sont nécessaires pour obtenir la réfraction avec l'approximation de 0″,01 pour $\theta = 80°$.

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs des intégrales dont dépendent les coefficients $A_1, A_3, \ldots$ Pour cela prenons la quantité $s^n(1-\omega)$, dans laquelle n désigne un nombre entier et positif;

en remarquant que cette quantité s'évanouit pour les deux limites $\omega = 0$ et $\omega = 1$, on a l'équation de condition

$$\int d\,[s^n (1-\omega)] = 0$$

ou

$$\int s^n\, d\,\omega = n \int s^{n-1} (1-\omega)\, d\,s.$$

Mais en vertu de la formule (12) et de la loi de Mariotte et de Gay-Lussac on a

$$\frac{d\,p}{p_0} = -\frac{g_0}{l}\frac{\varrho}{\varrho_0}\frac{d\,h}{1+\beta\,t_0};$$

en y mettant

$$h = a\,s$$

$$i = \frac{l\,(1+\beta\,t_0)}{a\,g_0}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1-\omega,$$

on obtient

$$\frac{d\,p}{p_0} = -(1-\omega)\frac{d\,s}{i},$$

par conséquent

$$\int s^n\, d\,\omega = -\,i\,n \int s^{n-1}\,\frac{d\,p}{p_0}.$$

Pour $n = 1$ on a

$$\int s\, d\,\omega = i. \qquad (a)$$

Cette intégrale est seule indépendante de la loi des couches atmosphériques; elle a été donnée par Carlini.

Pour $n = 2$ on a

$$\int s^2\, d\,\omega = -\,2\,i \int s\,\frac{d\,p}{p_0};$$

en intégrant par parties, et en remplaçant ds par sa valeur $-iz\frac{dp}{p}$, dans laquelle z exprime la fonction

$$z = \frac{1+\beta\,t}{1+\beta\,t_0}$$

on obtient

$$\int s^2 \, d\omega = -2\, i^2 \int x \frac{d\,p}{p_0}.$$

Mais la formule

$$\frac{p}{p_0} = (1-\omega)\, z$$

donne

$$\frac{d\,p}{p_0} = -z\, d\omega + (1-\omega)\, d\,z,$$

par conséquent

$$\int s^2 \, d\omega = 2\, i^2 \left\{ \int z^2 d\omega - \int z\, d\, z\, (1-\omega) \right\}$$

ensuite

$$\int s^2 \, d\omega = i^2 \left\{ -z^2 (1-\omega) + \int z^2 \, d\omega \right\}.$$

Pour les limites $\omega = 0$ et $\omega = 1$ on a

$$\int s^2 \, d\omega = i^2 (1 + \int z^2 \, d\omega).$$

Si l'on y met la valeur

$$z = \frac{1}{1 + k\,\omega^{\frac{5}{7}}}$$

on trouve

$$\int s^2 \, d\omega = 2\, i^2 \left(1 - \frac{7}{12}\, k + \ldots\right). \qquad (b)$$

De la même manière on obtiendra

$$\int s^3 \, d\omega = 6\, i^3 \, (1 - 1{,}387\, k + \ldots)$$

$$\int s^4 \, d\omega = 24\, i^4 \qquad (c)$$

$$\int s^5 \, d\omega = 120\, i^5.$$

Considérons maintenant la quantité

$$s^n \, (1 - \omega^m)$$

dans laquelle n et m sont des nombres entiers plus grands que

l'unité. Cette quantité s'annule pour les deux limites de l'atmosphère on a donc la relation

$$\int d\, s^n\, (1-\omega^m) = 0,$$

ou

$$m \int s^n\, \omega^{m-1}\, d\,\omega = n \int s^{n-1} (1-\omega^m)\, d\, s.$$

Si l'on y met

$$d\, s = -\frac{i}{1-\omega}\,\frac{d\, p}{p_0}$$

et que l'on effectue l'intégration par parties on obtient

$$m \int s^n\, \omega^{m-1}\, d\,\omega = n\, i \left\{ \int \frac{p}{p_0} d\left(s^{n-1}\, \frac{1-\omega^m}{1-\omega} \right) - \frac{p}{p_0}\, \frac{1-\omega^m}{1-\omega}\, s^{n-1} \right\}.$$

Le dernier terme disparaît pour les deux limites; on a donc

$$m \int s^n\, \omega^{m-1}\, d\,\omega = n\, i \int \frac{p}{p_0} d\left(s^{n-1}\, \frac{1-\omega^m}{1-\omega} \right).$$

Pour $n=1$ on a

$$m \int s\, \omega^{m-1}\, d\,\omega = i \int \frac{p}{p_0} d\left(\frac{1-\omega^m}{1-\omega} \right),$$

ou

$$m \int s\, \omega^{m-1}\, d\,\omega = i \int z\,(1-\omega)\, d\left(\frac{1-\omega^m}{1-\omega} \right).$$

Si l'on y met la valeur de la quantité z donnée par la formule (28) on trouve facilement

$$m \int s \omega^{m-1} d\omega = i \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} - \left(\frac{7}{12} + \frac{7}{19} + \ldots + \frac{7}{7m+5} - \frac{7m}{7m+5} \right) k + \ldots \right\}.$$

De cette formule on déduit

$$\int s\, \omega\, d\, \omega = \frac{3}{4}\, i \left(1 - \frac{49}{342}\, k + \ldots \right)$$

$$\int s \omega^2\, d\, \omega = \frac{11}{18}\, i \left(1 - \frac{1225}{5434}\, k + \ldots \right). \qquad (d)$$

Pour d'autres valeurs du nombre n il suffit d'avoir la valeur des

intégrales respectives, en y négligeant les termes dépendants de k, et l'on trouve

$$\int s^2 \omega \, d\omega = \frac{7}{4} i^2$$

$$\int s^2 \omega^2 \, d\omega = \frac{85}{54} i^2$$

$$\int s^3 \omega \, d\omega = \frac{45}{8} i^3 \qquad (e)$$

$$\int s^4 \omega \, d\omega = \frac{93}{4} i^4.$$

Introduisons à présent les valeurs des intégrales (a), (b), (c), (d), (e) dans les expressions des coefficients $A_1, A_3, \ldots$ nous aurons

$$A_1 = \alpha \left\{ 1 - i + \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{4}\alpha i \left(1 - \frac{49}{342}k\right) + \frac{5}{2}\alpha^2 + 2i^2 \left(1 - \frac{7}{12}k\right) \right\}$$

$$A_3 = \alpha \left\{ i - \frac{1}{2}\alpha - 5i^2 \left(1 - \frac{7}{12}k\right) + \frac{9}{2}\alpha i \left(1 - \frac{49}{342}k\right) - \frac{5}{3}\alpha^2 \right\}$$

$$A_5 = \alpha \left\{ 3i^2 \left(1 - \frac{7}{12}k\right) - \frac{9}{4}\alpha i \left(1 - \frac{49}{342}k\right) + \frac{1}{2}\alpha^2 - 36i^3 + \frac{63}{2}\alpha i^2 - \frac{55}{4}\alpha^2 i \right\} \qquad (33)$$

$$A_7 = \alpha \left\{ 15 i^3 (1 - 1{,}387\, k) - \frac{105}{8}\alpha i^2 + \frac{55}{12}\alpha^2 i - \frac{5}{8}\alpha^3 - 330 i^4 + \frac{4725}{16}\alpha i^3 \right\}$$

$$A_9 = \alpha \left\{ 105 i^4 - 3675 i^5 - \frac{1575}{16}\alpha i^3 + \frac{22785}{32}\alpha i^4 + \frac{2975}{72}\alpha^2 i^2 \right\}.$$

Les valeurs précédentes des coefficients de la série (32) montrent que l'influence de l'inégalité de la température dans l'atmosphère terrestre sur la valeur de la réfraction astronomique est très petite, pourvu que la hauteur de l'astre ne soit pas plus petite que 10°. En effet, si l'on calcule séparément les termes multipliés par k, on trouve la valeur suivante de la variation de la réfraction dépendante de la quantité k:

$$\delta r = -k(0'',000109\ \mathrm{tg}\theta + 0'',000257\ \mathrm{tg}^3\theta + 0'',000155\ \mathrm{tg}^5\theta - 0'',0000024\ \mathrm{tg}^7\theta + \ldots).$$

Pour $\theta = 80°$ on obtient

$$\delta r = -0'',32\, k.$$

La quantité k peut varier entre les limites très petites depuis la valeur zéro jusqu'à un quart à peu près, d'où il suit que δr, pour $\theta = 80°$, ne dépassera pas 0″,1. Mais pour les distances zénithales θ plus grandes que 80° la valeur de la partie de la réfraction astronomique affectée de la quantité k augmente dans un rapport très grand, de sorte que, pour la réfraction horizontale, elle peut s'élever à trois ou à quatre minutes.

La réfraction correspondante à la distance zénithale $\theta = 45°$ s'exprime à l'aide de la formule

$$r = \alpha\left(1 - 2i + 2\alpha + 10i^2\left(1 - \frac{7}{12}k\right) - 9\alpha i\left(1 - \frac{49}{342}k\right) + \frac{14}{3}\alpha^2 + \ldots\right)$$

dont on doit se servir pour en tirer la valeur de la constante α, en supposant que la valeur de cette réfraction soit connue.

La série que nous venons de trouver pour la réfraction astronomique contient trois quantités α, i et k qui doivent être exactement connues. La quantité i, comme on sait, dépend de la valeur du coefficient l qui entre dans la formule

$$p = l\varrho(1 + \beta t).$$

Dans le paragraphe 2 de ce mémoire nous avons fait la remarque que la valeur de ce coefficient, comme elle est adoptée dans toutes les tables des réfractions, s'éloigne sensiblement de celle qui a été trouvée directement par les expériences physiques de M. Regnault. A la page 14 et la suivante nous avons expliqué la cause de cette divergence, et nous avons montré qu'il n'existe aucune raison de supposer que la quantité l soit plus petite que 8000. Si la valeur exacte de l, pour l'air atmosphérique, diffère du dernier nombre, la différence ne doit s'élever qu'à quelques unités qui, d'ailleurs, n'auront aucune influence sur la valeur de la réfraction. La quantité i doit être calculée à l'aide de la formule

$$i = \frac{l(1 + \beta t_0)}{a g_0},$$

où a désigne le rayon de courbure du méridien terrestre correspon-

dant à la latitude géographique φ du lieu de l'observation, et g_0 est la gravité relative à cette latitude. Comme la valeur de l se rapporte à la latitude de Paris, la gravité en ce dernièr lieu étant prise pour l'unité, on aura donc

$$g_0 = \frac{1 - 0{,}002588 \cos 2\varphi}{1 - 0{,}002588 \cos 2\,(48°50')}.$$

En se servant de la valeur de a, qui est

$$a = 6367300 \left(1 - \frac{1}{200} \cos 2\varphi\right),$$

on trouvera

$$i = 0{,}0012569\,(1 + 0{,}007588 \cos 2\varphi)(1 + \beta t_0),$$

et pour la latitude φ peu différente de 50° on aura

$$i = 0{,}0012553\,(1 + \beta t_0)\left\{1 - 0{,}000000166\,(\varphi - 50)\right\}.$$

Nous emploierons la valeur $i = 0{,}001255\,(1 + \beta t_0)$ dans la construction des tables des réfractions.

Jusqu'à présent les tables des réfractions de Bessel sont regardées comme les plus parfaites, du moins la partie de ces tables qui se rapporte aux distances zénithales depuis zéro jusqu'à 75°. C'est de ces tables que nous tirerons la valeur de la constante α. D'après „Fundamenta" la réfraction relative à la distance zénithale $\theta = 45°$ est égale à 57″,49317; pour la réduire à celle de „Tabulae regiomontanae" il faut augmenter ce nombre dans le rapport de 1,003282 à l'unité, et l'on aura 57″,6819 pour la réfraction donnée par ces dernières tables. Cette réfraction a lieu pour la température de l'air égale à 48,75 degrés de Fahrenheit, et pour 29,5966 pouces anglais de la hauteur du baromètre. En égalant cette réfraction à l'expression théorique de la réfraction correspondante à $\theta = 45°$ on aura

$$57'',6819 = \alpha\left\{1 - 2i + 2\alpha + 10\,i^2\left(1 - \frac{7}{12}k\right) - 9\,\alpha\,i\left(1 - \frac{49}{342}k\right) + \frac{14}{3}\alpha^2\right\}.$$

Cette relation donne

$$\alpha = 57'',7987.$$

Si l'on calcule la valeur de α que nous désignons par α_0, pour la température zéro de l'air et pour 30 pouces de la hauteur du baromètre, on trouve

$$\alpha_0 = 60'',5845.$$

Pour la commodité du calcul de la réfraction apparente nous la représentons sous la forme

$$r = \frac{\alpha}{\alpha_0} \mu \operatorname{tg} \theta,$$

où μ se déduira de la formule

$$\mu = \frac{\alpha_0}{\alpha}(A_1 - A_3 \operatorname{tg}^2 \theta + A_5 \operatorname{tg}^4 \theta - A_7 \operatorname{tg}^6 \theta + A_9 \operatorname{tg}^8 \theta - \ldots).$$

Soit b la hauteur du baromètre observé, ξ l'excés de b sur 30 pouces, la quantité μ variera avec ξ et avec la température t_0 de l'air. Mais la variation de la quantité μ étant très petite jusqu'à une très grande distance zénithale, nous pouvons nous borner aux termes du premier ordre de t_0 et de ξ dans la valeur de μ, en écrivant

$$\log \mu = \log \mu_0 + p\, t_0 + q\, \xi,$$

et la réfraction apparente se déduira de la formule

$$r = \frac{1 + \frac{1}{30}\xi}{1 + \beta\, t_0} \mu \operatorname{tg} \theta.$$

Mais le calcul logarithmique étant plus expéditif nous présenterons la valeur cherchée de r, comme il suit:

$$\log r = \log \mu + \log \operatorname{tg} \theta + \log \left(1 + \frac{1}{30}\xi\right) - \log (1 + \beta\, t_0).$$

et nous donnerons les tables nécessaires pour en tirer les valeurs respectives de

$$\log \mu,\ \log \left(1 + \frac{1}{30}\xi\right),\ \xi,\ \text{et}\ \log (1 + \beta\, t_0).$$

Pour la distance zénithale θ dépassant une certaine limite qui ne permet pas de se borner aux termes du premier ordre des quan-

tités ξ et t_0 dans la valeur de $\log \mu$, nous y tenons compte aussi des termes du second ordre de ces mêmes quantités. Pour déduire plus sûrement ces termes nous avons calculé séparément les trois valeurs particulières de μ relatives aux trois températures: $t_0 = -30°,0°$ et $+30°$ ce qui nous a conduit, par un calcul simple à évaluer la variation de μ dépendante de la variation de la température de l'air. Ces trois valeurs particulières de μ sont calculées à l'aide des valeurs de α et de i, comme il suit:

$t_0 =$	$-30°$	$0°$	$+30°$
$\alpha =$	$68'',0687$	$60'',5845$	$54'',5831$
$i =$	$0,001117$	$0,001255$	$0,001393.$

Quant à la valeur de ε, nous avons remarqué dans le paragraphe précédent, que sa valeur déduite des observations de M. Glaisher exigerait une correction très sensible pour qu'elle fût applicable aux contrées continentales. A défaut d'observations directes qui puissent confirmer cette conclusion, j'ai déterminé la valeur de cette constante par les observations astronomiques dont j'ai tiré la valeur $\varepsilon = 0,1975$; ce qui donne, pour la température τ_0 des dernières couches atmosphériques, la valeur égale à -45 degrés centigrades.

Nous verrons dans la suite que la série qui exprime la réfraction devient beaucoup plus convergente, lorsqu'elle est ordonnée suivant les puissances ascendantes de la quantité λ dont la valeur est

$$\lambda = \frac{k}{1+k} = \frac{\varepsilon + (1+\varepsilon)\,\beta\, t_0}{(1+\varepsilon)(1+\beta\, t_0)} = \frac{0,1649 + \beta\, t_0}{1+\beta\, t_0}; \qquad (34)$$

c'est cette valeur dont nous nous servirons pour le calcul des réfractions; il est donc nécessaire de remplacer, dans les expressions des coefficients $A_1, A_2, \ldots$ la quantité k par λ.

Si l'on calcule les trois valeurs de μ correspondantes aux trois températures $-30°$, $0°$ et $+30°$, ainsi que leurs variations dépen-

dantes de ξ, on trouve respectivement

$$\iota = 60'',5465 - 0'',05743\,\mathrm{tg}^2\theta + 0'',0001777\,\mathrm{tg}^4\theta - 0'',000000950\,\mathrm{tg}^6\theta + 0'',0000000071\,\mathrm{tg}^8\theta$$
$$= 60\ ,5353 - 0\ ,06676\,\mathrm{tg}^2\theta + 0\ ,0002289\,\mathrm{tg}^4\theta - 0\ ,000001008\,\mathrm{tg}^6\theta + 0\ ,0000000120\,\mathrm{tg}^8\theta \quad (35)$$
$$= 60\ ,5242 - 0\ ,07594\,\mathrm{tg}^2\theta + 0\ ,0002883\,\mathrm{tg}^4\theta - 0\ ,000001160\,\mathrm{tg}^6\theta + 0\ ,0000000188\,\mathrm{tg}^8\theta$$

$$d\mu = \xi \left\{ 0'',00100 + 0'',000331\,\mathrm{tg}^2\theta - 0'',00000144\,\mathrm{tg}^4\theta + 0'',000000008\,\mathrm{tg}^6\theta \right\}$$
$$d\mu = \xi \left\{ 0\ ,00089 + 0\ ,000295\,\mathrm{tg}^2\theta - 0\ ,00000147\,\mathrm{tg}^4\theta + 0\ ,000000010\,\mathrm{tg}^6\theta \right\} \quad (36)$$
$$d\mu = \xi \left\{ 0\ ,00080 + 0\ ,000264\,\mathrm{tg}^2\theta - 0\ ,00000152\,\mathrm{tg}^4\theta + 0\ ,000000012\,\mathrm{tg}^6\theta \right\}$$

Les valeurs précédentes nous ont servi dans la construction de la partie des réfractions astronomiques qui s'étendent depuis le zénith jusqu'à la distance zénithale égale à 80°. Quant à l'autre partie relative à des distances zénithales plus grandes que 80° jusqu'à l'horizon, le développement en série ordonnée par rapport aux puissances de $\mathrm{tg}\,\theta$ n'est pas possible, il est donc nécessaire d'effectuer l'intégration de la différentielle de la réfraction astronomique d'une autre manière.

8. La formule (2), en y posant

$$\frac{h}{a} = s,$$

et en effectuant, dans le radical, la multiplication indiquée, devient

$$dr = \frac{\alpha}{1 - 2\alpha\omega} \frac{\sin\theta\, d\omega}{\sqrt{\cos^2\theta + 2s - 2\alpha\omega + s^2 - 4\alpha\omega s - 2\alpha\omega s^2}}.$$

Nous observons que les deux termes du second ordre contenus sous le radical, savoir $s^2 - 4\alpha\omega s$, ne produisent aucune influence sensible sur la réfraction, quoique l'un et l'autre terme, pris séparément, puisse modifier la réfraction horizontale jusqu'à une seconde près. Le dernier terme $2\alpha\omega s^2$, étant du troisième ordre, est sans conséquence. Par suite on a

$$dr = \frac{\alpha}{1 - 2\alpha\omega} \frac{\sin\theta\, d\omega}{\sqrt{\cos^2\theta + 2s - 2\alpha\omega}}.$$

On remplace ordinairement le coefficient $1-2\alpha\omega$ par sa valeur moyenne $1-\alpha$ ce qui n'affecte pas l'exactitude de la réfraction; de cette manière nous aurons définitivement

$$dr = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\sin\theta\, d\omega}{\sqrt{\cos^2\theta + 2s - 2\alpha\omega}}. \qquad (37)$$

Pour effectuer l'intégration de cette formule il faut y mettre la valeur de s donnée par la formule (13). Mais la quantité $1-z$, qui exprime la loi de température dans l'atmosphère terrestre, a pour la valeur

$$1 - z = \frac{k\omega^{\frac{5}{7}}}{1 + k\omega^{\frac{5}{7}}},$$

on aura donc

$$s = i\left\{ -\log(1-\omega) + \frac{k\omega^{\frac{5}{7}}}{1+k\omega^{\frac{5}{7}}} - \int \frac{k\omega^{\frac{5}{7}}}{1+k\omega^{\frac{5}{7}}} \frac{d\omega}{1-\omega} \right\}.$$

Au lieu de la variable ω nous prenons une autre que nous désignons par x en posant

$$x = -\log(1-\omega),$$

d'où il suit

$$\omega = 1 - e^{-x}. \qquad (38)$$

Soit

$$\varphi = \frac{k\omega^{\frac{5}{7}}}{1+k\omega^{\frac{5}{7}}} - \int \frac{k\omega^{\frac{5}{7}}}{1+k\omega^{\frac{5}{7}}} \frac{d\omega}{1-\omega}$$

on aura

$$s = i(x + \varphi).$$

En substituant la valeur précédente de s dans la formule (37), et en remarquant que

$$d\omega = e^{-x}\, dx,$$

on trouvera

$$dr = \frac{1}{1-\alpha} \frac{\alpha}{\sqrt{2i}} \frac{\sin\theta\, e^{-x}\, dx}{\sqrt{a^2 + x + \varphi - \frac{\alpha}{i}(1-e^{-x})}},$$

où, pour simplifier la formule, nous avons fait

$$a = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\,i}}. \qquad (39)$$

La quantité $\varphi - \frac{\alpha}{i}(1 - e^{-x})$, est toujours très petite par rapport aux deux premiers termes contenus dans le radical qui entre dans l'expression de la différentielle de la réfraction; il est donc permis de développer ce radical suivant les puissances de cette quantité. En effectuant ce développement on obtient

$$dr = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\sin\theta}{\sqrt{2i}}\left\{\frac{e^{-x}\,dx}{(a^2+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{i}\frac{(1-e^{-x})e^{-x}dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\alpha}{i}\right)^2\frac{(1-e^{-x})^2e^{-x}dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}} + \ldots\right\}$$

$$+ \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\sin\theta}{\sqrt{2i}}\left\{-\frac{1}{2}\varphi\frac{e^{-x}dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{2.4}\varphi^2\frac{e^{-x}dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi^3\frac{e^{-x}dx}{(a^2+x)^{\frac{7}{2}}} + \ldots\right.$$

$$\left. - \frac{\alpha}{i}\left[\frac{1.3}{2.4}2\varphi\frac{(1-e^{-x})e^{-x}dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}3\varphi^2\frac{(1-e^{-x})e^{-x}dx}{(a^2+x)^{\frac{7}{2}}} + \ldots\right]\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\alpha}{i}\right)^2\left[\frac{1.3.5}{2.4.6}3\varphi\frac{(1-e^{-x})^2e^{-x}dx}{(a^2+x)^{\frac{7}{2}}} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}6\varphi^2\frac{(1-e^{-x})^2e^{-x}dx}{(a^2+x)^{\frac{9}{2}}} + \ldots\right] - \ldots\right\}$$

Les termes qui composent la première ligne du second membre, étant indépendants de la fonction φ, donneront la partie de la réfraction astronomique dans l'hypothèse d'une température constante dans toute l'epaisseur de l'atmosphère terrestre. Tous les autres termes multipliés par $\varphi, \varphi^2 \ldots$ fourniront la valeur de la partie de la réfraction dépendante de l'inégalité de la température dans l'atmosphère. Nous désignons la première partie par r_1 et la seconde par r_2, en sorte qu'on ait

$$r = r_1 + r_2.$$

La série qui exprime r_2, à la vérité, n'est pas applicable pour $\theta = 90°$, c'est-à-dire, pour la réfraction horizontale; mais elle est suffisamment convergente pour d'autres valeurs de la distance zénithale θ, même jusqu'à $\theta = 89°45'$. Si l'on effectue l'intégration

par parties dans tous les termes qui donnent r_1, et qu'on remarque que la partie indépendante du signe d'intégrale s'évanouit pour les deux limites de x, savoir $x=0$ et $x=\infty$, on arrivera facilement à l'expression suivante de r_1:

$$r_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\sin\theta}{\sqrt{2i}}\left\{H+\frac{\alpha}{i}H'+\left(\frac{\alpha}{i}\right)^2 H''+\left(\frac{\alpha}{i}\right)^3 H'''+\left(\frac{\alpha}{i}\right)^4 H^{IV}+\ldots\right\} \quad (40)$$

où, pour abréger la formule, nous avons posé,

$$H = H_1$$

$$H' = H_2 - H_1$$

$$H'' = \frac{1}{1.2}(3H_3 - 4H_2 + H_1)$$

$$H''' = \frac{1}{1.2.3}(16H_4 - 27H_3 + 12H_2 - H_1)$$

$$H^{IV} = \frac{1}{1.2.3.4}(125H_5 - 256H_4 + 162H_3 - 32H_2 + H_1)$$

$$H^{(n)} = \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n}\left\{H_1 - \frac{n}{2}2^n H_2 + \frac{n(n-1)}{2.3}3^n H_3 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4}4^n H_4 + \ldots\right\}$$

$$H_n = \int_0^\infty \frac{ne^{-nx}dx}{\sqrt{a^2+x}} = 2\sqrt{n}\,e^{na^2}\int_{a\sqrt{n}}^\infty e^{-t^2}dt.$$

En empruntant la valeur de la fonction H_n des tables respectives on en formera aisément le tableau donnant les valeurs des quantités $H, H', H''\ldots$, et l'on verra que la suite de ces quantités décroîtra rapidement. Comme la valeur du rapport $\frac{\alpha}{i}$ ne surpasse pas un tiers; pour cette raison la série (40) sera fortement convergente de manière que l'on puisse s'arrêter à la quatrième puissance de ce rapport.

Pour la commodité du calcul numérique nous donnons ici le tableau contenant les valeurs des $H, H', H''\ldots$ correspondantes aux différents arguments a.

Argument a	H	H'	H''	H'''	H_{IV}
0,0	1,77245	0,73418	0,4779	0,3560	0,284
0,1	1,58893	0,56295	0,3177	0,2056	0,143
0,2	1,43395	0,43738	0,2153	0,1218	0,075
0,3	1,30204	0,34402	0,1484	0,0740	0,040
0,4	1,18894	0,27368	0,1042	0,0458	0,019
0,5	1,09128	0,22008	0,0742	0,0290	0,012
0,6	1,00641	0,17874	0,0536	0,0188	0,007
0,7	0,93219	0,14653	0,0393	0,0124	0,001
0,8	0,86691	0,12117	0,0292	0,0083	
0,9	0,80918	0,10102	0,0219	0,0056	
1,0	0,75787	0,08487	0,0167	0,0039	
1,2	0,67094	0,06116	0,0099	0,0019	
1,4	0,60039	0,04521	0,0061	0,0011	
1,6	0,54228	0,03416	0,0039	0,0005	
1,8	0,49373	0,02632	0,0027	0,0003	
2,0	0,45267	0,02063	0,0018	0,0002	
2,2	0,41758	0,01642	0,0012	0,0001	
2,4	0,38728	0,01326	0,0008		
2,6	0,36090	0,01084	0,0006		
2,8	0,33774	0,00896	0,0004		
3,0	0,31726	0,00750	0,0003		
3,2	0,29906	0,00631	0,0002		
3,4	0,28277	0,00536	0,0002		
3,6	0,26811	0,00459	0,0001		
3,8	0,25486	0,00396	0,0001		
4,0	0,24283	0,00343	0,0001		

9. Nous passons maintenant à la détermination de la seconde partie r_2 de la réfraction qui dépend de l'inégalité de température de l'atmosphère terrestre. Si, dans les termes dépendants de la fonction φ, on effectue l'intégration par parties on obtient

$$r_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\sin\theta}{\sqrt{2i}}\int_0^\infty \left\{ -\frac{1}{2}K - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{i}L - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{i}\right)^2 M - \frac{1}{12}\left(\frac{\alpha}{i}\right)^3 N - \ldots \right\} \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}, \quad (41)$$

où K, L, M et N désignent les fonctions suivantes:

$$\begin{aligned}
K &= \varphi e^{-x} - \frac{1}{2}\frac{d(\varphi^2 e^{-x})}{dx} + \frac{1}{6}\frac{d^2(\varphi^3 e^{-x})}{dx^2} - \ldots \\
L &= \frac{d[\varphi(1-e^{-x})e^{-x}]}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2[\varphi^2(1-e^{-x})e^{-x}]}{dx^2} + \frac{1}{6}\frac{d^3[\varphi^3(1-e^{-x})e^{-x}]}{dx^3} - \ldots \\
M &= \frac{d^2[\varphi(1-e^{-x})^2 e^{-x}]}{dx^2} - \frac{1}{2}\frac{d^3[\varphi^2(1-e^{-x})^2 e^{-x}]}{dx^3} + \frac{1}{6}\frac{d^4[\varphi^3(1-e^{-x})^3 e^{-x}]}{dx^4} - \ldots \\
N &= \frac{d^3[\varphi(1-e^{-x})^3 e^{-x}]}{dx^3} - \frac{1}{2}\frac{d^4[\varphi^2(1-e^{-x})^3 e^{-x}]}{dx^4} + \frac{1}{6}\frac{d^5[\varphi^3(1-e^{-x})^3 e^{-x}]}{dx^5} - \ldots
\end{aligned} \quad (42)$$

Pour éviter la complication inutile des formules, nous partageons les intégrales qui entrent dans la composition de la série (41) en deux parties: l'une s'étendant entre les limites $x=0$ et $x=0{,}510826$, la dernière limite étant la racine de l'équation

$$e^{-x} = \frac{3}{5},$$

et l'autre contenue dans les limites $x=0{,}510826$ et $x=\infty$. Pour les premières limites, il est avantageux de se servir des développements en séries, suivant la variable x de toutes les quantités qui entrent dans les formules (42). Dans ce but, remarquons qu'on a

$$\varphi = \frac{k(1-e^{-x})^{\frac{5}{7}}}{1+k(1-e^{-x})^{\frac{5}{7}}} - \int \frac{k(1-e^{-x})^{\frac{5}{7}}}{1+k(1-e^{-x})^{\frac{5}{7}}}\, dx.$$

En développant en série cette expression de φ, ensuite, en multipliant la série trouvée par le développement connue de la fonction e^{-x}, on obtient

$$\varphi = kx^{\frac{5}{7}}\left(1-\frac{79}{84}x+\frac{2515}{11172}x^2-\frac{4645}{107016}x^3-\frac{12619}{1901592}x^4-\ldots\right)$$
$$-k^2x^{\frac{10}{7}}\left(1-\frac{134}{119}x+\frac{205}{392}x^2-\frac{5560}{31899}x^3-\ldots\right)$$
$$+k^3x^{\frac{15}{7}}\left(1-\frac{107}{77}+\frac{1310}{1421}x^2-\frac{5305}{12348}x^3-\ldots\right)$$

$$\varphi e^{-x} = kx^{\frac{5}{7}}(1-1,94048x+1,6656x^2-0,9054x^3+0,3610x^4-\ldots)$$
$$-k^2x^{\frac{10}{7}}(1-2,12605x+2,1490x^2-1,4269x^3+0,7114x^4-\ldots)$$
$$+k^3x^{\frac{15}{7}}(1-2,38961x+2,8115x^2-2,2130x^3+1,3222x^4-\ldots)$$

$$\varphi^2e^{-x} = k^2x^{\frac{10}{7}}(1-2,8809x+3,7157x^2-2,9521x^3+1,6784x^4-0,7437x^5+\ldots)$$
$$-2k^2x^{\frac{15}{7}}(1-3,0665x+4,3736x^2-3,9701x^3+2,6362x^4-1,3838x^5+\ldots)$$

$$\varphi^3e^{-x} = k^3x^{\frac{15}{7}}(1-3,8214x+6,6503x^2-7,1386x^3+5,4229x^4-3,1680x^5+1,504x^6-\ldots).$$

Si l'on met ces valeurs dans les fonctions K, L, M et N on trouve facilement

$$K = kx^{\frac{5}{7}}(1-1,94048x+1,6656x^2-0,9054x^3+0,3610x^4-\ldots)$$
$$-k^2x^{\frac{3}{7}}\left(\frac{5}{7}-2,49830x+4,2437x^2-4,3878^3+3,1286x^4-1,6789x^5+\ldots\right)$$
$$+k^3x^{\frac{1}{7}}\left(\frac{20}{49}-2,1465x+5,7939x^2-9,6196x^3+10,9473x^4-9,1868x^5+6,0146x^6-\ldots\right)$$

$$L = kx^{\frac{5}{7}}\left(\frac{12}{7}-6,624x+10,009x^2-9,916x^3+6,746x^4-\ldots\right)$$
$$-k^2x^{\frac{3}{7}}\left(\frac{85}{49}-11,647x+31,406x^2-49,127x^3+52,358x^4-41,760x^5+\ldots\right)$$
$$+k^3x^{\frac{1}{7}}\left(\frac{440}{343}-13,361x+54,109x^2-125,62x^3+195,67x^4-223,65x^5+199,19x^6-\ldots\right)$$

$$M = kx^{\frac{5}{7}}\left(\frac{228}{49}-29,645x+73,36x^2-106,49x^3+107,78x^4-\ldots\right)$$
$$-k^2x^{\frac{3}{7}}\left(\frac{2040}{343}-63,228x+248,44x^2-547,6x^3+808,9x^4-884,5x^5+\ldots\right)$$

$$N = \frac{5928}{343}k\,x^{\frac{5}{7}}(1-9,46x+33,73x^2-68,9x^3+96,2x^4-\ldots).$$

Posons, pour abréger les formules,

$$N_n = \int \frac{x^{n+\frac{5}{7}}}{(a^2+x)^{\frac{8}{2}}}\, dx$$

$$Q_n = \int \frac{x^{n+\frac{3}{7}}}{(a^2+x)^{\frac{8}{2}}}\, dx$$

$$R_n = \int \frac{x^{n+\frac{1}{7}}}{(a^2+x)^{\frac{8}{2}}}\, dx,$$

où toutes les intégrales doivent être prises entre les limites $x=0$ et $x=0{,}510826$. En vertu de ces valeurs on aura

$$\int K \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}} = k(N_0 - 1{,}94048 N_1 + 1{,}6656 N_2 - 0{,}9054 N_3 + 0{,}3610 N_4 - \ldots)$$

$$- k^2 \left(\frac{5}{7} Q_0 - 2{,}49830 Q_1 + 4{,}2437 Q_2 - 4{,}3878 Q_3 + 3{,}1286 Q_4 - 1{,}6789 Q_5 + \ldots\right)$$

$$+ k^3 \left(\frac{20}{49} R_0 - 2{,}1465 R_1 + 5{,}7939 R_2 - 9{,}6196 R_3 + 10{,}9473 R_4 - 9{,}1868 R_5 + \ldots\right).$$

Les trois autres intégrales dont dépend la valeur de r_2 donnée par la formule (41) s'exprimeront de la même manière en remplaçant les coefficients numériques qui entrent dans la fonction K par les coefficients numériques relatifs aux fonctions L, M et N.

Il s'agit à présent de trouver les valeurs des coefficients N_0, $N_1 \ldots$, Q_0, $Q_1 \ldots$, R_0, $R_1 \ldots$

La formule qui donne N_n conduit à la relation suivante:

$$\left(n+\frac{3}{14}\right) N_n + \left(n+\frac{5}{7}\right) a^2 N_{n-1} = \frac{x^{n+\frac{5}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}.$$

Si l'on fait

$$N_n = \frac{x^{\frac{5}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\, y_n$$

on obtient

$$\left(n+\frac{3}{14}\right) y_n + \left(n+\frac{5}{7}\right) a^2 y_{n-1} = x^n.$$

En y mettant successivement $n=0, 1, 2...$ nous exprimerons toutes les fonctions y_n à l'aide de celle qui correspond à $n=-1$. Désignons par E la fonction $\frac{5}{7}a^2 y_{-1}$ en posant

$$E=\frac{5}{7}a^2 y_{-1}=\frac{5}{7}\frac{a^2\sqrt{a^2+x}}{x^{\frac{5}{7}}}N_{-1},$$

nous trouverons

$$N_0=\frac{14}{3}\frac{x^{\frac{5}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}(1-E)$$

$$N_1=\frac{14}{17}\frac{x^{\frac{5}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\left\{x-\frac{24}{3}a^2(1-E)\right\}$$

$$N_2=\frac{14}{31}\frac{x^{\frac{5}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\left\{x^2-\frac{38}{17}a^2x+\frac{38.24}{17.3}a^4(1-E)\right\}$$

$$N_3=\frac{14}{45}\frac{x^{\frac{5}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\left\{x^3-\frac{52}{31}a^2x^2+\frac{52.38}{31.17}a^4x-\frac{52.38.24}{31.17.3}a^6(1-E)\right\}.$$

Lorsqu'on aura déterminé la valeur de E pour différentes valeurs de la quantité a on calculera aisément les coefficients $N_0, N_1...$ au moyen des formules précédentes.

La quantité E sera déterminée, en effectuant l'intégration, entre les limites $x=0$ et $x=0{,}510826$, dans la formule

$$E=\frac{5}{7}a^2\frac{\sqrt{a^2+x}}{x^{\frac{5}{7}}}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{7}}(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

On peut remplacer cette formule par celle qui suit:

$$E=\frac{5}{7}\frac{(1-\eta)^{\frac{3}{14}}}{\eta^{\frac{5}{7}}}\int\frac{d\eta}{\eta^{\frac{2}{7}}(1-\eta)^{\frac{3}{14}}},$$

dans laquelle, après l'intégration effectuée, on doit poser

$$\eta=\frac{x}{a^2+x}.$$

En réduisant en série cette dernière valeur de E, nous trouverons

$$E=(1-\eta)^{\frac{3}{14}}\left\{1+\frac{3}{14}\cdot\frac{5}{12}\eta+\frac{3.17}{14.28}\cdot\frac{5}{19}\eta^2+\frac{3.17.31}{14.28.42}\cdot\frac{5}{26}\eta^3+\ldots\right\}.$$

Nous ferons usage de cette série, lorsque la quantité a est plus grande que $\frac{1}{2}$. Pour les valeurs très petites de a la série précédente étant peu convergente, on peut la remplacer avec avantage par celle qui suit:

$$E=\frac{10}{11}\frac{(1-\eta)^{\frac{5}{14}}}{\eta^{\frac{5}{7}}}\left\{1,33566-(1-\eta)^{\frac{11}{14}}\left[1+\frac{2}{7}\cdot\frac{11}{25}(1-\eta)+\frac{2.9}{7.14}\cdot\frac{11}{39}(1-\eta)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2.9.16}{7.14.21}\cdot\frac{11}{53}(1-\eta)^3+\ldots\right]\right\}.$$

Comme la quantité E diffère, en général, fort peu de l'unité, il serait donc avantageux d'exprimer directement la différence $1-E$ à l'aide d'une série convergente. Il est facile de trouver la série suivante:

$$1-E=\frac{1}{8}\eta\left(1+\frac{21}{38}\eta+\frac{21.35}{38.52}\eta^2+\frac{21.35.49}{38.52.66}\eta^3+\ldots\right),$$

dont on pourra se servir pour calculer $1-E$, lorsque la quantité a est plus grande que $\frac{1}{2}$.

En procédant de la même manière, nous arriverons aux formules suivantes pour déterminer $Q_0, Q_1\ldots$

$$Q_0=\frac{14}{1}\frac{x^{\frac{5}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}(E'-1)$$

$$Q_1=\frac{14}{13}\frac{x^{\frac{3}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\left\{x-\frac{20}{1}a^2(E'-1)\right\}$$

$$Q_2=\frac{14}{27}\frac{x^{\frac{3}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\left\{x^2-\frac{34}{13}a^2x+\frac{34.20}{13.1}a^4(E'-1)\right\}$$

$$Q_3=\frac{14}{41}\frac{x^{\frac{3}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\left\{x^3-\frac{48}{27}a^2x^2+\frac{48.34}{27.13}a^4x-\frac{48.34.20}{27.13.1}a^6(E'-1)\right\}$$

$$E'=\frac{3}{7}a^3\frac{\sqrt{a^2+x}}{x^{\frac{8}{7}}}\int\frac{dx}{x^{\frac{4}{7}}(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{7}\frac{1}{\eta^{\frac{3}{7}}(1-\eta)^{\frac{1}{14}}}\int\frac{(1-\eta)^{\frac{2}{14}}}{\eta^{\frac{4}{7}}}d\eta$$

$$E'=\frac{1}{(1-\eta)^{\frac{1}{14}}}\left\{1-\frac{1}{14}\frac{3}{10}\eta+\frac{1.13}{14.28}\cdot\frac{3}{17}\eta^2-\frac{1.13.27}{14.28.42}\cdot\frac{3}{24}\eta^3+\ldots\right\}$$

$$E'=\frac{3}{7}\frac{1}{\eta^{\frac{3}{7}}(1-\eta)^{\frac{1}{14}}}\left\{2{,}24782-\frac{14}{15}(1-\eta)^{\frac{15}{14}}\left[1+\frac{4}{7}\cdot\frac{15}{29}(1-\eta)+\frac{4.11}{7.14}\cdot\frac{15}{43}(1-\eta)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{4.11.18}{7.14.21}\cdot\frac{15}{57}(1-\eta)^3+\ldots\right]\right\}$$

$$E'-1=\frac{1}{20}\eta\left(1+\frac{21}{34}\eta+\frac{21.35}{34.48}\eta^2+\frac{21.35.49}{34.48.62}\eta^3+\ldots\right).$$

Les coefficients R_0, R_1... se déduiront des formules, comme il suit:

$$R_0=\frac{7}{8}\frac{x^{\frac{8}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\frac{E''}{a^2}$$

$$R_1=\frac{14}{9}\frac{x^{\frac{8}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}(1-E'')$$

$$R_2=\frac{14}{32}\frac{x^{\frac{8}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\left\{x-\frac{30}{9}a^2(1-E'')\right\}$$

$$R_3=\frac{14}{37}\frac{x^{\frac{8}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\left\{x^2-\frac{44}{23}a^2x+\frac{44.30}{23.9}a^4(1-E'')\right\}$$

$$R_4=\frac{14}{51}\frac{x^{\frac{8}{7}}}{\sqrt{a^2+x}}\left\{x^3-\frac{58}{37}a^2x^2+\frac{58.44}{37.23}a^4x-\frac{58.44.30}{37.23.9}a^6(1-E'')\right\}$$

etc.

$$E''=\frac{8}{7}a^3\frac{\sqrt{a^2+x}}{x^{\frac{8}{7}}}\int\frac{x^{\frac{1}{7}}dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{8}{7}\frac{(1-\eta)^{\frac{9}{14}}}{\eta^{\frac{8}{7}}}\int\frac{\eta^{\frac{1}{7}}d\eta}{(1-\eta)^{\frac{9}{14}}}$$

$$E''=(1-\eta)^{\frac{9}{14}}\left\{1+\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{15}\eta+\frac{9.23}{14.28}\cdot\frac{8}{22}\eta^2+\frac{9.23.37}{14.28.42}\cdot\frac{8}{29}\eta^3+\ldots\right\}$$

$$E''=\frac{8}{7}\frac{(1-\eta)^{\frac{9}{14}}}{\eta^{\frac{8}{7}}}\left\{2{,}6317-\frac{14}{5}(1-\eta)^{\frac{6}{14}}\left[1-\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{19}(1-\eta)-\frac{1.6}{7.14}\cdot\frac{5}{33}(1-\eta)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1.6.13}{7.14.21}\cdot\frac{5}{47}(1-\eta)^3-\ldots\right]\right\}.$$

Au moyen des formules exposées ici nous trouvons les valeurs suivantes des intégrales:

$$\frac{1}{2}\int K\frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{1}{2}\int L\frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{1}{4}\int M\frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}}\text{ et }\frac{1}{12}\int N\frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}},$$

dont dépend la seconde partie de la réfraction astronomique produite par les couches atmosphériques relatives aux limites $\omega=0$ et $\omega=\frac{2}{5}$:

Arg. a	$\frac{1}{2}\int K\frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}}$.	$\frac{1}{2}\int L\frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}}$.
0,1	$0{,}7245\,\lambda - 0{,}3037\,\lambda^2 + 0{,}194\,\lambda^3$	$0.9294\,\lambda - 0.9698\,\lambda^2$
0,15	$0{,}5663\,\lambda - 0{,}1465\,\lambda^2 + 0{,}056\,\lambda^3$	$0{,}6889\,\lambda - 0.5272\,\lambda^2$
0,2	$0{,}4518\,\lambda - 0{,}0707\,\lambda^2 + 0{,}017\,\lambda^3$	$0{,}5244\,\lambda - 0{,}3050\,\lambda^2$
0,3	$0.2988\,\lambda - 0{,}0090\,\lambda^2 + 0{,}002\,\lambda^3$	$0{,}3204\,\lambda - 0{,}1110\,\lambda^2$
0,4	$0{,}2047\,\lambda + 0{,}0091\,\lambda^2$	$0{,}2060\,\lambda - 0.0417\,\lambda^2$
0,5	$0{,}1445\,\lambda + 0{,}0137\,\lambda^2$	$0{,}1391\,\lambda - 0{,}0134\,\lambda^2$
0,6	$0.1041\,\lambda + 0{,}0131\,\lambda^2$	$0{,}0959\,\lambda - 0\,0033\,\lambda^2$
0,7	$0{,}0768\,\lambda + 0{,}0113\,\lambda^2$	$0{,}0689\,\lambda + 0{,}0011\,\lambda^2$
0,8	$0{,}0578\,\lambda + 0{,}0096\,\lambda^1$	$0{,}0505\,\lambda + 0{,}0029\,\lambda^2$
0,9	$0{,}0444\,\lambda + 0{,}0080\,\lambda^2$	$0{,}0382\,\lambda + 0{,}0033\,\lambda^2$
1,0	$0{,}0347\,\lambda + 0{,}0066\,\lambda^2$	$0{,}0295\,\lambda + 0{,}0030\,\lambda^2$
1,2	$0{,}0221\,\lambda + 0{,}0043\,\lambda^2$	$0{,}0184\,\lambda + 0{,}0007\,\lambda^2$
1,4	$0{,}0148\,\lambda + 0{,}0031\,\lambda^2$	$0{,}0122\,\lambda + 0{,}0015\,\lambda^2$
1,6	$0{,}0103\,\lambda + 0{,}0022\,\lambda^2$	$0{,}0084\,\lambda + 0{,}0013\,\lambda^2$
1,8	$0{,}0076\,\lambda + 0{,}0018\,\lambda^2$	$0{,}0069\,\lambda$
2,0	$0{,}0056\,\lambda$	
2,2	$0{,}0043\,\lambda$	
2,4	$0{,}0033\,\lambda$	
2,6	$0{,}0027\,\lambda$	
2,8	$0{,}0021\,\lambda$	
3,0	$0.0017\,\lambda$	
3,2	$0{,}0014\,\lambda$	
3,4	$0{,}0012\,\lambda$	

Arg. a	$\frac{1}{4}\int M \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}}$.	$\frac{1}{12}\int N \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{5}{2}}}$.
0,1	0,960 λ	0,687 λ
0,15	0,673 λ	0,360 λ
0,2	0,486 λ	0,187 λ
0,3	0,272 λ	0,010 λ
0,4	0,163 λ	
0,5	0,106 λ	
0,6	0,069 λ	
0,7	0,048 λ	
0,8	0,032 λ	
0,9	0,024 λ	
1,0	0,019 λ	
1,2	0,011 λ	

10. Les valeurs de quatre intégrales précédentes prises entre les limites $x=0{,}510826$ et $x=\infty$ peuvent être calculées aisément de la manière suivante. Développons la fonction

$$\varphi = \frac{k(1-e^{-x})^{\frac{5}{7}}}{1+k(1-e^{-x})^{\frac{5}{7}}} - \int \frac{k(1-e^{-x})^{\frac{5}{7}}}{1+k(1-e^{-x})^{\frac{5}{7}}}\,dx$$

en série suivant les puissances de e^{-x}. Dans ce but, posons

$$h = k^{\frac{7}{5}},$$

$$\psi = \frac{k(1-e^{-x})^{\frac{5}{7}}}{1+k(1-e^{-x})^{\frac{5}{7}}},$$

nous aurons

$$\psi = \frac{(h-he^{-x})^{\frac{5}{7}}}{1+(h-he^{-x})^{\frac{5}{7}}}$$

$$\varphi = \psi - \int \psi\,dx.$$

Si l'on fait

$$\frac{h^{\frac{5}{7}}}{1+h^{\frac{5}{7}}} = \frac{k}{1+k} = \lambda,$$

on aura

$$\psi = \lambda - h\frac{d\lambda}{dh}e^{-x} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2\lambda}{dh^2}e^{-2x} - \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3\lambda}{dh^3}e^{-3x} + \ldots$$

ensuite

$$\varphi = \lambda - \lambda x - \frac{2}{1}h\frac{d\lambda}{dx}e^{-x} + \frac{3}{2}\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2\lambda}{dh^2}e^{-2x} - \frac{4}{3}\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3\lambda}{dh^3}e^{-3x} + \ldots + C,$$

où C doit être trouvé de manière que la fonction φ s'annule pour $x=0$.

De la formule

$$\lambda = \frac{h^{\frac{5}{7}}}{1+h^{\frac{5}{7}}}$$

on tire

$$h\frac{d\lambda}{dh} = \frac{5}{7}\lambda(1-\lambda).$$

En différentiant successivemt cette formule on arrivera facilement aux valeurs des dérivées $h^2\frac{d^2\lambda}{dh^2}$, $h^3\frac{d^3\lambda}{dh^3}\ldots$ Ainsi, en faisant, pour abréger,

$$\varphi = A_0 - \lambda x - A_1 e^{-x} - A_2 e^{-2x} - A_3 e^{-3x} - \ldots$$

on aura

$$A_0 = 1{,}79698\,\lambda - 0{,}44776\,\lambda^2 + 0{,}13774\,\lambda^3 - \ldots$$

$$A_1 = \frac{2}{1}\cdot\frac{5}{7}\lambda(1-\lambda)$$

$$A_2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{5.2}{7.14}\lambda(1-\lambda)(1+5\lambda)$$

$$A_3 = \frac{4}{3}\cdot\frac{5.2.9}{7.14.21}\lambda(1-\lambda)\left(1+\frac{10}{3}\lambda+\frac{25}{3}\lambda^2\right)$$

$$A_4 = \frac{5}{4}\cdot\frac{5.2.9.16}{7.14.21.28}\lambda(1-\lambda)\left(1+\frac{35}{12}\lambda+\frac{25}{4}\lambda^2+\frac{125}{12}\lambda^3\right).$$

En partant de cette valeur de la fonction φ, et en effectuant tous les calculs numériques nous arrivons aux résultats suivants des quatre intégrales entre les limites $x=0{,}510826$ et $x=\infty$:

$$b^2 = a^2 + 0{,}510826,$$

$$y_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n \int_0^\infty \frac{ne^{-nx}dx}{\sqrt{a^2+x}},$$

$$\frac{1}{2}\int K \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}} = \lambda\left\{\frac{1}{b}(0{,}51994+\frac{3}{5}a^2) - (2{,}29698+a^2)\,y_1 + 1{,}42857\,y_2 \right.$$
$$\left. + 0{,}15306\,y_3 + 0{,}05831\,y_4 + 0{,}03124\,y_5 + 0{,}01971\,y_6\right\}$$
$$+\lambda^2\left\{\frac{3}{20}b+\frac{1}{b}(0{,}29207+0{,}50255a^2+\frac{3}{10}a^4) - (4{,}23728+3{,}29698a^2+\frac{1}{2}a^4)y_1\right.$$
$$+(5{,}84852+2{,}85714a^2)y_2 - (1{,}39424-0{,}45918a^2)y_3 - (0{,}23200-0{,}2332a^2)y_4$$
$$\left. -(0{,}08768-0{,}1562a^2)y_5 - (0{,}04542-0{,}11824a^2)y_6\right\}$$
$$+\lambda^3\left\{-\frac{1}{20}b^3+(0{,}20064+\frac{3}{20}a^2)b - (0{,}1396+0{,}4421a^2+0{,}1456a^4-\frac{1}{10}a^6)\frac{1}{b}\right.$$
$$-(7{,}4191+7{,}5343a^2+2{,}1485a^4+\frac{1}{6}a^6)y_1+(21{,}1763+15{,}9827a^2+2{,}8571a^4)y_2$$
$$-(17{,}1727+4{,}9480a^2-0{,}6888a^4)y_3+(1{,}8355-1{,}1029a^2+0{,}4665a^4)y_4$$
$$\left.+(0{,}4686-0{,}5217a^2+0{,}3905a^4)y_5+(0{,}2015-0{,}3235a^2+0{,}3547a^4)y_6\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int L\frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}} = \lambda\left\{(0{,}1148+\frac{3}{25}a^2)\frac{1}{b}+(3{,}2970+a^2)y_1-(7{,}9511+2a^2)y_2\right.$$
$$\left. + 3{,}8265\,y_3 + 0{,}3790\,y_4 + 0{,}1354\,y_5 + 0{,}0692\,y_6\right\}$$
$$+\lambda^2\left\{\frac{3}{100}b+(0{,}5295+1{,}0585a^2+\frac{21}{50}a^4)\frac{1}{b}+(7{,}5343+4{,}2970a^2+\frac{1}{2}a^4)\,y_1\right.$$
$$-(30{,}9768+17{,}9022a^2+2a^4)y_2+(33{,}2562+11{,}4796a^2)y_3$$
$$\left.-(7{,}2514-1{,}5160a^2)y_4-(1{,}1556-0{,}6768a^2)y_5-(0{,}4176-0{,}4151a^2)y_6\right\}$$
$$\frac{1}{4}\int M\frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}} = \lambda\left\{-(0{,}1971+\frac{21}{125}a^2)\frac{1}{b}-(2{,}1485+\frac{1}{2}a^2)y_1+(15{,}0451+4a^2)y_2\right.$$
$$\left.-(24{,}0048+\frac{9}{2}a^2)y_3+9{,}4461y_4+0{,}8460y_5+0{,}2797y_6\right\}$$
$$\frac{1}{12}\int N\frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}} = \lambda\left\{-(0{,}2187+\frac{121}{625}a^2)\frac{1}{b}+(0{,}8828+\frac{1}{6}a^2)y_1-(16{,}0927+4a^2)y_2\right.$$
$$\left.+(58{,}6062+\frac{27}{2}a^2)y_3-(69{,}9394+\frac{32}{3}a^2)y_4+23{,}1891y_5+1{,}8769y_6\right\}.$$

La fonction y_n dont les valeurs particulières sont données dans le tableau ci-après, diminue indéfiniment, quand l'indice n augmente; mais cette diminution n'est pas si grande pour que l'on puisse conclure que les six premières fonctions $y_1\, y_2 \ldots y_6$ soient suffisantes, pour donner la valeur de l'intégrale avec l'approximation de cinq décimales. Il est pourtant très facile de montrer que les six premières fonctions y_n sont même plus que suffisantes. En effet nous observons que le développement primitif de chacune des quatre intégrales dont il s'agit, va suivant la différence des deux fonctions

$$\left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{1}{b} \text{ et } y_n$$

correspondantes aux différens indices $n=1, 2, 3 \ldots 6$, et la différence

$$\left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{1}{b} - y_n$$

décroît d'une manière fort rapide, quoique l'un et l'autre de deux termes qui y entrent ne diminue que dans un rapport assez faible. Mais pour la commodité du calcul numérique, en s'arrêtant aux termes relatifs à l'indice $n=6$, nous avons réuni tous les termes qui sont multipliés par $\frac{1}{b}$, de manière à ne former qu'un seul terme.

Par le changement convenable de la variable x la fonction y_n se réduit à l'expression suivante:

$$y_n = 2\sqrt{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n e^{nb^2} \int_{b\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

et nous pouvons tirer la valeur de l'intégrale précédente des tables respectives.

Le tableau suivant contient les valeurs de la fonction y_n dont on aura besoin pour pouvoir calculer les quatre intégrales mentionnées plus haut.

a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0,1	0,55039	0,38082	0,24391	0,15212	0,09366	0,05726
0,15	0,54692	0,37790	0,24186	0,15076	0,09280	0,05671
0,2	0,54219	0,37395	0,23908	0,14893	0,09162	0,05597
0,3	0,52943	0,36336	0,23167	0,14405	0,08851	0,05402
0,4	0,51322	0,35005	0,22244	0,13799	0,08465	0,05159
0,6	0,47490	0,31923	0,20128	0,12425	0,07595	0 04618
0.8	0,43442	0,28769	0,18000	0,11058	0,06737	0,04086
1,0	0,39585	0,25855	0,16066	0,09829	0,05971	0,03614
1,2	0,36087	0,23287	0,14388	0,08773	0,05317	0,03213
1,4	0,32989	0,21071	0,12958	0,07879	0,04767	0,02877
1,6	0,30273	0,19170	0,11744	0,07125	0,04305	0,02595
1,8	0,27898	0,17539	0,10712	0,06488	0,03916	0,02359
2,0	0,25819	0,16135	0,09830	0,05945	0,03585	0,02158
2,2	0,23994	0,14919	0,09071	0,05479	0,03302	0,01987
2,4	0,22386	0,13861	0,08413	0,05078	0,03058	0,01839
2,6	0,20962	0,12933	0,07838	0,04728	0,02846	0,01716
2,8	0,19695	0,12114	0,07334	0,04420	0,02660	0,01599
3,0	0,18562	0,11388	0,06887	0,04149	0,02496	0,01500
3,2	0,17546	0,10740	0,06490	0,03908	0,02350	0,01412
3,4	0,16629	0,10159	0,06148	0,03693	0,02220	0,01334

Nous présentons dans le tableau qui suit les valeurs des intégrales cherchées, prises entre les limites $\omega = \frac{2}{5}$ et $\omega = 1$.

a	$\frac{1}{2}\int K \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{2}\int L \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}$
0,1	$+0,0532\,\lambda + 0,0233\,\lambda^2 + 0,059\,\lambda^3$	$-0,0471\,\lambda - 0,0168\,\lambda^2$
0,15	$0,0515\,\lambda + 0,0223\,\lambda^2 + 0,059\,\lambda^3$	$-0\,0463\,\lambda - 0\,0167\,\lambda^2$
0,2	$0,0492\,\lambda + 0,0212\,\lambda^2 + 0,058\,\lambda^3$	$-0,0453\,\lambda - 0,0166\,\lambda^2$
0,3	$0,0434\,\lambda + 0,0184\,\lambda^2 + 0,057\,\lambda^3$	$-0,0425\,\lambda - 0,0162\,\lambda^2$
0,4	$0,0368\,\lambda + 0,0152\,\lambda^2 + 0,054\,\lambda^3$	$-0,0390\,\lambda - 0,0148\,\lambda^2$
0,5	$0,0302\,\lambda + 0,0117\,\lambda^2 + 0,052\,\lambda^3$	$-0,0352\,\lambda - 0,0137\,\lambda^2$
0,6	$0,0241\,\lambda + 0,0089\,\lambda^2 + 0,050\,\lambda^3$	$-0,0313\,\lambda - 0,0126\,\lambda^2$
0,7	$0,0190\,\lambda + 0,0065\,\lambda^2 + 0,048\,\lambda^3$	$-0,0276\,\lambda - 0\,0114\,\lambda^2$
0,8	$0,0146\,\lambda + 0,0046\,\lambda^2 + 0,045\,\lambda^3$	$-0,0242\,\lambda - 0,0102\,\lambda^2$
0,9	$0,0111\,\lambda + 0,0031\,\lambda^2 + 0,043\,\lambda^3$	$-0,0211\,\lambda - 0,0091\,\lambda^2$

1,0	$0{,}0083\,\lambda + 0{,}0020\,\lambda^2 + 0{,}041\,\lambda^3$	$-0{,}0183\,\lambda - 0{,}0081\,\lambda^2$
1,2	$0{,}0044\,\lambda + 0{,}0006\,\lambda^2$	$-0{,}0136\,\lambda$
1,4	$0{,}0021\,\lambda + 0{,}0001\,\lambda^2$	$-0{,}0102\,\lambda$
1,6	$+0{,}0007\,\lambda - 0{,}0004\,\lambda^2$	$-0{,}0078\,\lambda$
1,8	$-0{,}0000\,\lambda - 0{,}0007\,\lambda^2$	$-0{,}0062\,\lambda$
2,0	$-0{,}0005\,\lambda$	
2,2	$-0{,}0007\,\lambda$	
2,4	$-0{,}0007\,\lambda$	
2,6	$-0{,}0008\,\lambda$	
2,8	$-0{,}0007\,\lambda$	
3,0	$-0{,}0006\,\lambda$	
3,2	$-0{,}0006\,\lambda$	
3,4	$-0{,}0006\,\lambda$	

a	$\frac{1}{4}\int M \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{12}\int N \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}$
0,1	$-0{,}0498\,\lambda$	$-0{,}0105\,\lambda$
0,15	$-0{,}0483\,\lambda$	$-0{,}0100\,\lambda$
0,2	$-0{,}0465\,\lambda$	$-0{,}0098\,\lambda$
0,3	$-0{,}0419\,\lambda$	$-0{,}0093\,\lambda$
0,4	$-0{,}0369\,\lambda$	
0,5	$-0{,}0312\,\lambda$	
0,6	$-0{,}0263\,\lambda$	
0,7	$-0{,}0218\,\lambda$	
0,8	$-0{,}0180\,\lambda$	
0,9	$-0{,}0147\,\lambda$	
1,0	$-0{,}0119\,\lambda$	
1,2	$-0{,}0080\,\lambda$	

En ajoutant les deux parties des intégrales cherchées nous trouverons leurs valeurs entre les limites $\omega = 0$ et $\omega = 1$. Nous posons, pour abréger,

$$K_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty K \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}, \qquad L_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty L \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$M_1 = \frac{1}{4}\int_0^\infty M \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}, \qquad N_1 = \frac{1}{12}\int_0^\infty N \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les valeurs des quantités K_1, L_1, M_1 et N_1 sont contenues dans les tableaux qui suivent:

a	K_1	L_1
0,1	$0{,}7777\,\lambda - 0{,}280\,\lambda^2 + 0{,}25\,\lambda^3$	$0{,}8823\,\lambda - 0{,}987\,\lambda^2$
0,15	$0{,}6178\,\lambda - 0{,}124\,\lambda^2 + 0{,}12\,\lambda^3$	$0{,}6426\,\lambda - 0{,}544\,\lambda^2$
0,2	$0{,}5010\,\lambda - 0{,}049\,\lambda^2 + 0{,}08\,\lambda^3$	$0{,}4791\,\lambda - 0{,}322\,\lambda^2$
0,3	$0{,}3422\,\lambda + 0{,}009\,\lambda^2 + 0{,}06\,\lambda^3$	$0{,}2780\,\lambda - 0{,}127\,\lambda^2$
0,4	$0{,}2415\,\lambda + 0{,}024\,\lambda^2 + 0{,}05\,\lambda^3$	$0{,}1621\,\lambda - 0{,}056\,\lambda^2$
0,5	$0{,}1747\,\lambda + 0{,}025\,\lambda^2 + 0{,}05\,\lambda^3$	$0{,}1039\,\lambda - 0{,}027\,\lambda^2$
0,6	$0{,}1282\,\lambda + 0{,}022\,\lambda^2 + 0{,}05\,\lambda^3$	$0{,}0646\,\lambda - 0{,}016\,\lambda^2$
0,7	$0{,}0958\,\lambda + 0{,}018\,\lambda^2 + 0{,}05\,\lambda^3$	$0{,}0412\,\lambda - 0{,}010\,\lambda^2$
0,8	$0{,}0724\,\lambda + 0{,}014\,\lambda^2 + 0{,}04\,\lambda^3$	$0{,}0263\,\lambda - 0{,}007\,\lambda^2$
0,9	$0{,}0555\,\lambda + 0{,}011\,\lambda^2 + 0{,}02\,\lambda^3$	$0{,}0170\,\lambda - 0{,}006\,\lambda^2$
1,0	$0{,}0430\,\lambda + 0{,}009\,\lambda^2$	$0{,}0112\,\lambda - 0{,}005\,\lambda^2$
1,2	$0{,}0265\,\lambda + 0{,}005\,\lambda^2$	$0{,}0050\,\lambda - 0{,}004\,\lambda^2$
1,4	$0{,}0169\,\lambda + 0{,}004\,\lambda^2$	$0{,}0018\,\lambda - 0{,}002\,\lambda^2$
1,6	$0{,}0111\,\lambda + 0{,}002\,\lambda^2$	$0{,}0006\,\lambda$
1,8	$0{,}0076\,\lambda + 0{,}001\,\lambda^2$	
2,0	$0{,}0051\,\lambda + 0{,}001\,\lambda^2$	
2,2	$0{,}0036\,\lambda$	
2,4	$0{,}0026\,\lambda$	
2,6	$0{,}0019\,\lambda$	
2,8	$0{,}0014\,\lambda$	
3,0	$0{,}0011\,\lambda$	
3,2	$0{,}0008\,\lambda$	
3,4	$0{,}0006\,\lambda$	

a	M_1	N_1
0,1	$0{,}911\,\lambda$	$0{,}676\,\lambda$
0,15	$0{,}624\,\lambda$	$0{,}350\,\lambda$
0,2	$0{,}439\,\lambda$	$0{,}177\,\lambda$
0,3	$0{,}205\,\lambda$	$0{,}011\,\lambda$
0,4	$0{,}126\,\lambda$	
0,5	$0{,}075\,\lambda$	
0,6	$0{,}042\,\lambda$	
0,7	$0{,}024\,\lambda$	
0,8	$0{,}014\,\lambda$	
0,9	$0{,}010\,\lambda$	
1,0	$0{,}007\,\lambda$	
1,2	$0{,}003\,\lambda$	

En réunissant la partie de la réfraction, qui est due à l'inégalité de température dans l'atmosphère, à celle qui a lieu dans l'atmosphère dont la température des diverses couches est supposée constante on obtiendra la valeur de la réfraction apparente. Cette réfraction s'exprime à l'aide de la formule

$$r=\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\sin\theta}{\sqrt{2i}}\left\{H-K_1+\frac{\alpha}{i}(H'-L_1)+\left(\frac{\alpha}{i}\right)^2(H''-M_1)+\left(\frac{\alpha}{i}\right)^3(H'''-N_1)+\ldots\right\},$$

dans laquelle il ne restera qu'à substituer les valeurs des quantités $H, H', H''\ldots$ données à la page 91, et les valeurs de K_1, L_1, M_1 et N_1 tirées des tables précédentes. L'argument a se déduira de la formule

$$a=\frac{\cos\theta}{\sqrt{2i}}.$$

10. Dans la construction des tables des réfractions nous avons procédé comme il suit: soient α_0 et i_0 les valeurs de α et i correspondantes à la température zéro de l'air; nommons b la hauteur de la colonne barométrique, t_0 la température donnée par le thermomètre attaché au baromètre, m la différence des dilatations du mercure et de l'échelle barométrique; en désignant par b_0 la hauteur du baromètre à laquelle se rapporte la valeur α_0, nous aurons,

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\sqrt{2i}}=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\frac{1}{\sqrt{2i_0}}\frac{b}{b_0}\cdot\frac{1}{1+mt_0}\cdot\frac{1}{(1+\beta t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit

$$R=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\frac{\sin\theta}{\sqrt{2i_0}}\left\{H-K_1+\frac{\alpha}{i}(H'-L_1)+\left(\frac{\alpha}{i}\right)^2(H''-M_1)+\left(\frac{\alpha}{i}\right)^3(H'''-N_1)+\ldots\right\}$$

on aura

$$r=R\frac{b}{b_0}\frac{1}{1+mt_0}\cdot\frac{1}{(1+\beta t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Faisons, pour abréger,

$$\operatorname{Log}\frac{b}{b_0}=B$$

$$-\operatorname{Log}(1+mt_0)=T$$

$$-\operatorname{Log}(1+\beta t)=\tau$$

nous aurons

$$\text{Log } r = \text{Log } R + B + T + \frac{3}{2}\tau.$$

Pour obtenir les quantités B, T et τ nous avons dressé les tables qui donnent ces quantités aisément. Quant à la valeur de R il est évident qu'elle varie avec la température de l'air et avec le baromètre. La première variation n'est pas forte, même pour la réfraction horizontale; elle diminue lorsque la hauteur de l'astre augmente, en devenant nulle pour $90 - \theta = 1°38'$. Au delà de cette limite la variation en question commence à augmenter, mais très faiblement. Nous avons jugé possible de nous en tenir à la forme considérée de la réfraction apparente depuis l'horizon jusqu'à la hauteur $\theta - 90 = 5°$.

Pour déduire plus sûrement la variation de R avec la température t nous avons calculé R pour les trois températures particulières $t = 0°$, $t = -30°$ et $t = +30°$, en faisant $b = b_0$. De ces trois valeurs de R il est aisé de présenter R sous la forme:

$$R = R_0 + a\,t + b\,t^2.$$

Quant à la variation de R dépendante de celle du baromètre, il suffit de ne tenir compte que de la première puissance de la variation du baromètre. Soit

$$\frac{b}{b_0} = 1 + \frac{\xi}{b_0};$$

en exprimant ξ en pouces anglais et en faisant $b_0 = 30$ on trouvera

$$\delta R = \frac{1}{30}\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\frac{\text{Sin}\,\theta}{\sqrt{2i_0}}\xi\left\{\frac{\alpha_0}{i}(H'-L_1) + 2\left(\frac{\alpha_0}{i}\right)^2(H''-M_1) + 3\left(\frac{\alpha_0}{i}\right)^3(H'''-N_1) + \ldots\right\}$$

En calculant δR pour les trois températures $t = 0°$, $t = -30°$ et $t = +30°$ on formera la valeur de δR, et l'on aura

$$\delta R = (\delta R_0 + a'\,t + b'\,t^2)\,\xi.$$

Le terme du troisième ordre dépendant de b' peut être, sans inconvénient, négligé. De cette manière on aura

$$R = R_0 + a\,t + b\,t^2 + (\delta R_0 + a'\,t)\,\xi.$$

Nous pouvons présenter la réfraction apparente r sous une autre forme qui sera avantageuse pour le calcul de r, quand la hauteur de l'astre n'est pas très petite. En effet, en posant

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} a \left\{ H - K_1 + \frac{\alpha}{i}(H' - L_1) + \left(\frac{\alpha}{i}\right)^2 (H'' - M_1) + \left(\frac{\alpha}{i}\right)^3 (H''' - N_1) + \ldots \right\},$$

nous avons

$$r = \mu \operatorname{tg} \theta \cdot \frac{b}{b_0} \frac{1}{1 + m t_0} \frac{1}{1 + \beta t},$$

par conséquent

$$\operatorname{Log} r = \operatorname{Log} \mu + \operatorname{Log} \operatorname{tg} \theta + B + T + \tau.$$

Par le calcul pareil à celui de R, il sera facile de présenter la valeur de $\operatorname{Log} \mu$ sous la même forme que celle de R. Comme la quantité μ varie assez faiblement avec la distance zénithale θ, il suffira donc de construire la table qui donnera $\operatorname{Log} \mu$ pour les degrés entiers, lorsque θ n'est pas très grande. Pour θ dépassant 60° nous avons jugé nécessaire de donner $\operatorname{Log} \mu$, dans les intervalles de vingt minutes. Nons avons diminué les intervalles de θ, à partir de $\theta = 80°$, jusqu'à dix minutes.

Pour le calcul des tables des réfractions, nous ont servi les valeurs suivantes des constantes α_0, i_0, β et m:

$$\alpha_0 = 60''.5845 \qquad i = 0,001255$$

$$\beta = 0,003665 \qquad m = 0,000162$$

Quant à la valeur de ε qui entre dans l'expression de la loi de température dans l'atmosphère terrestre, nous avons adopté deux valeurs: l'une $\varepsilon = 0,1188$ trouvée par les observations directes exécutées par M. Glaisher, et l'autre $\varepsilon = 1,1975$ qui a été trouvée à l'aide des observations des réfractions faites à Kazan. Cette dernière valeur étant déduite des observations du soleil, à son coucher, et pendant les chaleurs d'été, doit se rapporter à des climats continentaux. Nous avons calculé les tables des réfractions correspondantes à la première et à la seconde valeur de ε. Ces dernières ne s'étendent que pour neuf degrés de la distance zénithale.

Les tables des réfractions ainsi construites diffèrent essentiellement des autres tables sous le rapport de la loi des densités des couches atmosphériques, et cette différence se fait sentir dans la valeur de la réfraction horizontale et dans celles correspondantes à des hauteurs très petites de l'astre. La loi en question est très souvent modifiée considérablement par l'intervention, soit de la vapeur d'eau, toujours existante, dans une proportion plus ou moins grande, soit par d'autres causes locales.

La théorie est incapable d'evaluer l'effet de toutes les causes, d'ailleurs très variables pour différents lieux d'observation, qui troublent à chaque instant la trajectoire de la lumière dans l'atmosphère. Dans ce cas, il ne reste qu'à adopter l'hypothèse, sur la constitution de l'atmoshpère terrestre, qui est assez rapprochée de la vérité, et qui en même temps, peut se plier le mieux aux observations. L'hypothèse de Laplace ou celle de Ivory, lorsqu'on y regarde le paramètre de la fonction z comme une quantité variable dépendante de la température observée à la surface de la terre, remplit cette condition; par conséquent l'une ou l'autre hypothèse peut remplacer la loi réelle des densités des couches atmosphérique. Pour montrer la différence qui existe entre les réfractions produites par l'atmosphère réelle, et celles qui se rapportent à l'une des atmosphères hypothétiques nous avons choisi celle de Ivory en la modifiant de manière que la température de toutes les couches devienne constante, lorsque la température de la dernière couche où se trouve l'obsérvateur, est égale à $-45°C$. On a, à cette condition,

$$f = 0{,}1649 + \beta t,$$

t étant la température relative à cette dernière couche. Les tables des réfractions déduites de cette hypothèse ont été calculées à l'aide de la formule (21) page 31.

TABLES DES RÉFRACTIONS.

$$\text{Log. Réfr. app.} = \text{Log tg } \theta + \text{Log } \mu + B + T + \tau$$

$$\text{Log. Réfr. app.} = \text{Log } R + B + T + \frac{3}{2}\tau.$$

Table I donne la réfraction correspondante à la valeur $\varepsilon = 0{,}1188$ déduite des observations de M. Glaisher.

Table II donne la réfraction correspondante à la valeur $\varepsilon = 0{,}1975$.

Quant aux quantités t et ξ dont dépendent $\text{Log}\mu$ et R, la première désigne la température de l'air exprimée en degrés centigrades, et la seconde est donnée dans la Table III dont l'argument est égale à la hauteur du baromètre.

Table III donne les qnantités ξ et B.

Table IV donne la valeur τ correspondante à la température t de l'air. La quantité θ désigne la distance zénithale observée.

Table I.

Distance zénithale.	Log μ.
0°	1,78201 — 0,00000.27 t + 0,00000.6 ξ
4	1,78201 — 0,00000.27 t + 0,00000.6 ξ
8	1,78200 — 0,00000.27 t + 0,00000.6 ξ
12	1,78199 — 0,00000.27 t + 0,00000.6 ξ
16	1,78197 — 0,00000.27 t + 0,00000.7 ξ
20	1,78195 — 0,00000.28 t + 0,00000.7 ξ
24	1,78192 — 0,00000.30 t + 0,00000.7 ξ
28	1,78188 — 0,00000.32 t + 0,00000.7 ξ
32	1,78183 — 0,00000.35 t + 0,00000.7 ξ
36	1,78176 — 0,00000.38 t + 0,00000.7 ξ
40	1,78167 — 0,00000.42 t + 0,00000.8 ξ
42	1,78162 — 0,00000.44 t + 0,00000.8 ξ
44	1,78156 — 0,00000.47 t + 0,00000.8 ξ
46	1,78150 — 0,00000.50 t + 0,00000.9 ξ
48	1,78142 — 0,00000.54 t + 0,00000.9 ξ
50	1,78133 — 0,00000.58 t + 0,00000.9 ξ
51	1,78128 — 0,00000.60 t + 0,00001.0 ξ
52	1,78123 — 0,00000.63 t + 0,00001.0 ξ
53	1,78117 — 0,00000.65 t + 0,00001.0 ξ
54	1,78111 — 0,00000.68 t + 0,00001.0 ξ
55	1,78104 — 0,00000.71 t + 0,00001.1 ξ
56	1,78097 — 0,00000.74 t + 0,00001.1 ξ
57	1,78088 — 0,00000.78 t + 0,00001.1 ξ
58	1,78079 — 0,00000.82 t + 0,00001.2 ξ
59	1,78069 — 0,00000.87 t + 0,00001.2 ξ
60° 0′	1,78058 — 0,00000.92 t + 0,00001.3 ξ
20	1,78054 — 0,00000.94 t + 0,00001.3 ξ
40	1,78050 — 0,00000.96 t + 0,00001.3 ξ
61 0	1,78046 — 0,00000.98 t + 0,00001.3 ξ
20	1,78042 — 0,00001.00 t + 0,00001.3 ξ
40	1,78038 — 0,00001.02 t + 0,00001.4 ξ
62 0	1,78033 — 0,00001.04 t + 0,00001.4 ξ
20	1,78028 — 0,00001.06 t + 0,00001.4 ξ
40	1,78023 — 0,00001.08 t + 0,00001.4 ξ
63 0	1,78018 — 0,00001.11 t + 0,00001.4 ξ
20	1,78013 — 0,00001.13 t + 0,00001.5 ξ
40	1,78008 — 0,00001.16 t + 0,00001.5 ξ
64 0	1,78002 — 0,00001.19 t + 0,00001.5 ξ
20	1,77996 — 0,00001.21 t + 0,00001.5 ξ
40	1,77990 — 0,00001.24 t + 0,00001.6 ξ
65 0	1,77983 — 0,00001.27 t + 0,00001.6 ξ
20	1,77977 — 0,00001.30 t + 0,00001.6 ξ

Distance zénithale.	Log μ.
63° 40′	1,77970—0,00001.33t+0,00001.7ξ
66 0	1,77963—0,00001.36t+0,00001.7ξ
20	1,77955—0,00001.39t+0,00001,7ξ
40	1,77947—0,00001.42t+0,00001.8ξ
67 0	1,77939—0,00001.46t+0,00001.8ξ
20	1,77931—0,00001.50t+0,00001.9ξ
40	1,77922—0,00001.54t+0,00001.9ξ
68 0	1,77912—0,00001.58t+0,00001.9ξ
20	1,77902—0,00001.62t+0,00001.9ξ
40	1,77892—0,00001.66t+0,00002.0ξ
69 0	1,77881—0,00001.71t+0,00002.0ξ
20	1,77870—0,00001.76t+0,00002.1ξ
40	1,77859—0,00001.81t+0,00002.1ξ
70 0	1,77847—0,00001.87t+0,00002.2ξ
20	1,77834—0,00001.93t+0,00002.3ξ
40	1,77820—0,00001.99t+0,00002.3ξ
71 0	1,77806—0,00002.06t+0,00002.4ξ
20	1,77791—0,00002.13t+0,00002.4ξ
40	1,77776—0,00002.20t+0,00002.5ξ
72 0	1,77759—0,00002.27t+0,00002.6ξ
20	1,77742—0,00002.35t+0,00002.6ξ
40	1,77723—0,00002.43t+0,00002.7ξ
73 0	1,77704—0,00002.52t+0,00002.8ξ
20	1,77683—0,00002.61t+0,00002.9ξ
40	1,77661—0,00002.71t+0,00003.0ξ
74 0	1,77638—0,00002.82t+0,00003.1ξ
20	1,77613—0,00002.92t+0,00003.2ξ
40	1,77586—0,00003.03t+0,00003.3ξ
75 0	1,77558—0,00003.15t+0,00003.4ξ
20	1,77529—0,00003.27t+0,00003.6ξ
40	1,77497—0,00003.40t+0,00003.7ξ
76 0	1,77464—0,00003.55t+0,00003,9ξ
20	1,77428—0,00003.70t+0,00004.0ξ
40	1,77389—0,00003.86t+0,00004.2ξ
77 0	1,77347—0,00004.03t+0,00004.4ξ
20	1,77302—0,00004.21t+0,00004.5ξ
40	1,77254—0,00004.40t+0,00004.7ξ
78 0	1,77201—0,00004.62t+0,00004.9ξ
20	1,77145—0,00004.85t+0,00005.2ξ
40	1,77084—0,00005.09t+0,00005.5ξ
79 0	1,77017—(0,00005.36—0,00000.001t)t+(0,00005.8—0,00000.01t)ξ
20	1,76944—(0,00005.64—0,00000.001t)t+(0,00006.1—0,00000.01t)ξ
40	1,76865—(0,00005.94—0,00000.002t)t+(0,00006.4—0,00000.02t)ξ

Distance zénithale.	Log μ.
80° 0′	1,76779—(0,00006.27—0,00000.002t)t+(0,00006.7—0,00000.02t)ξ
10	1,76733—(0,00006.88—0,00000.002t)t+(0,00006.9—0,00000.02t)ξ
20	1,76684—(0,00007.11—0,00000.003t)t+(0,00007.1—0,00000.03t)ξ
30	1,76634—(0,00007.35—0,00000.003t)t+(0,00007.3—0,00000.03t)ξ
40	1,76581—(0,00007.60—0,00000.003t)t+(0,00007.5—0,00000.03t)ξ
50	1,76524—(0,00007.86—0,00000.004t)t+(0,00007.7—0,00000.03t)ξ
81 0	1,76465—(0,00008.12—0,00000.004t)t+(0,00008.0—0,00000.03t)ξ
10	1,76404—(0,00008.39—0,00000.004t)t+(0,00008.2—0,00000.03t)ξ
20	1,76339—(0,00008.66—0,00000.005t)t+(0,00008.5—0,00000.04t)ξ
30	1,76271—(0,00008.94—0,00000.005t)t+(0,00008.8—0,00000.04t)ξ
40	1,76199—(0,00009.23—0,00000.005t)t+(0,00009.1—0,00000.04t)ξ
50	1,76125—(0,00009.54—0,00000.006t)t+(0,00009.4—0,00000.04t)ξ
82 0	1,76045—(0,00009.87—0,00000.006t)t+(0,00009.7—0,00000.04t)ξ
10	1,75962—(0,00010.24—0,00000.006t)t+(0,00010.0—0,00000.05t)ξ
20	1,75872—(0,00010.64—0,00000.006t)t+(0,00010.4—0,00000.05t)ξ
30	1,75778—(0,00011.05—0,00000.007t)t+(0,00010.7—0,00000.05t)ξ
40	1,75677—(0,00011.49—0,00000.007t)t+(0,00011.1—0,00000.05t)ξ
50	1,75571—(0,00011.95—0,00000.007t)t+(0,00011.5—0,00000.05t)ξ
83 0	1,75458—(0,00012.43—0,00000.008t)t+(0,00011.9—0,00000.05t)ξ
10	1,75339—(0,00012.95—0,00000.008t)t+(0,00012.3—0,00000.06t)ξ
20	1,75213—(0,00013.49—0,00000.008t)t+(0,00012.8—0,00000.06t)ξ
30	1,75078—(0,00014.07—0,00000.009t)t+(0,00013.4—0,00000.06t)ξ
40	1,74935—(0,00014.68—0,00000.009t)t+(0,00014.0—0,00000.06t)ξ
50	1,74782—(0,00015.33—0,00000.009t)t+(0,00014.6—0,00000.07t)ξ
84 0	1,74618—(0,00016.02—0,00000.010t)t+(0,00015.3—0,00000.07t)ξ
10	1,74442—(0,00016.76—0,00000.011t)t+(0,00016.0—0,00000.08t)ξ
20	1,74252—(0,00017.56—0,00000.012t)t+(0,00016.7—0,00000.08t)ξ
30	1,74050—(0,00018.41—0,00000.013t)t+(0,00017.5—0,00000.09t)ξ
40	1,73831—(0,00019.32—0,00000.014t)t+(0,00018.3—0,00000.09t)ξ
50	1,73596—(0,00020.30—0,00000.015t)t+(0,00019.2—0,00000.10t)ξ
85 0	1,73342—(0,00021.40—0,00000.017t)t+(0,00020.1—0,00000.10t)ξ
10	1,73068—(0,00022.52—0,00000.018t)t+(0,00020.9—0,00000.10t)ξ
20	1,72771—(0,00023.73—0,00000.019t)t+(0,00021.8—0,00000.11t)ξ
30	1,72449—(0,00025.02—0,00000.020t)t+(0,00023.1—0,00000.12t)ξ
40	1,72099—(0,00026.35—0,00000.022t)t+(0,00024.2—0,00000.13t)ξ
50	1,71716—(0,00027.93—0,00000.024t)t+(0,00025.7—0,00000.14t)ξ
86 0	1,71297—(0,00029.55—0,00000.027t)t+(0,00027.1—0,00000.15t)ξ
10	1,70839—(0,00031.29—0,00000.030t)t+(0,00028.6—0,00000.16t)ξ
20	1,70337—(0,00033.18—0,00000.033t)t+(0,00030.3—0,00000.17t)ξ
30	1,69785—(0,00035.27—0,00000.037t)t+(0,00032.1—0,00000.18t)ξ
40	1,69175—(0,00037.55—0,00000.040t)t+(0,00034.0—0,00000.20t)ξ
50	1,68497—(0,00040.07—0,00000.045t)t+(0,00036.1—0,00000.21t)ξ
87° 0′	1,67742—(0,00042.79—0,00000.051t)t+(0,00038.5—0,00000.23t)ξ

Distance zénithale.	R.
85° 0′	$618'',9 + (0'',84 - 0'',001\,t)\,t + 0'',3\,\xi$
10	$636\,,1 + (0'',84 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,3\,\xi$
20	$654\,,4 + (0\,,84 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,3\,\xi$
30	$673\,,8 + (0\,,85 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,3\,\xi$
40	$694\,,2 + (0\,,85 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,4\,\xi$
50	$715\,,8 + (0\,,86 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,4\,\xi$
86 0	$738\,,5 + (0\,,86 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,4\,\xi$
10	$762\,,6 + (0\,,85 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,5\,\xi$
20	$788\,,2 + (0\,,85 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,6\,\xi$
30	$815\,,4 + (0\,,84 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,6\,\xi$
40	$844\,,4 + (0\,,83 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,7\,\xi$
50	$875\,,2 + (0\,,80 - 0\,,002\,t)\,t + 0'',7\,\xi$
87 0	$908\,,0 + (0\,,77 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,8\,\xi$
10	$943\,,1 + (0\,,74 - 0\,,002\,t)\,t + (0\,,9 - 0{,}01\,t)\,\xi$
20	$980\,,6 + (0\,,69 - 0\,,002\,t)\,t + (1\,,0 - 0{,}01\,t)\,\xi$
30	$1020\,,8 + (0\,,63 - 0\,,002\,t)\,t + (1\,,1 - 0{,}01\,t)\,\xi$
40	$1063\,,9 + (0\,,56 - 0\,,002\,t)\,t + (1\,,2 - 0{,}01\,t)\,\xi$
50	$1110\,,2 + (0\,,47 - 0\,,001\,t)\,t + (1\,,4 - 0{,}01\,t)\,\xi$
88 0	$1160\,,2 + (0\,,36 - 0\,,001\,t)\,t + (1\,,5 - 0{,}01\,t)\,\xi$
10	$1214\,,3 + (0\,,22 - 0\,,001\,t)\,t + (1\,,7 - 0{,}01\,t)\,\xi$
20	$1272\,,7 + (0\,,04 - 0\,,000\,t)\,t + (2\,,0 - 0{,}02\,t)\,\xi$
30	$1235\,,3 - (0\,,18 - 0\,,001\,t)\,t + (2\,,2 - 0{,}02\,t)\,\xi$
40	$1403\,,3 - (0\,,31 - 0\,,002\,t)\,t + (2\,,5 - 0{,}02\,t)\,\xi$
50	$1477\,,5 - (0\,,78 - 0\,,003\,t)\,t + (2\,,9 - 0{,}03\,t)\,\xi$
89 0	$1557\,,8 - (1\,,21 - 0\,,005\,t)\,t + (3\,,3 - 0{,}03\,t)\,\xi$
10	$1644\,,7 - (1\,,75 - 0\,,008\,t)\,t + (3\,,8 - 0{,}04\,t)\,\xi$
20	$1738\,,6 - (2\,,44 - 0\,,013\,t)\,t + (4\,,3 - 0{,}06\,t)\,\xi$
30	$1839\,,9 - (3\,,33 - 0\,,019\,t)\,t + (5\,,0 - 0{,}07\,t)\,\xi$
40	$1949\,,1 - (4'',49 - 0\,,027\,t)\,t + (5\,,6 - 0{,}09\,t)\,\xi$

$$\text{Log. Réfr. app.} = \text{Log}\,R + B + T + \frac{3}{2}\tau.$$

Table II.

Distance zénithale.	Log μ.
81° 0′	1,76457—(0,00008.12—0,00000.006t)t+(0,00008—0,00000.03t)ξ
10	1,76395—(0,00008.36—0,00000.006t)t+(0,00008—0,00000.03t)ξ
20	1,76329—(0,00008.63—0,00000.007t)t+(0,00008—0,00000.04t)ξ
30	1,76261—(0,00008.93—0,00000.007t)t+(0,00009—0,00000.04t)ξ
40	1,76189—(0,00009.22—0,00000.008t)t+(0,00009—0,00000.04t)ξ
50	1,76115—(0,00009.55—0,00000.008t)t+(0,00009—0,00000.04t)ξ
82 0	1,76034—(0,00009.88—0,00000.008t)t+(0,00010—0,00000.04t)ξ
10	1,75950—(0,00010.25—0,00000.008t)t+(0,00010—0,00000.05t)ξ
20	1,75858—(0,00010.65—0,00000.009t)t+(0,00010—0,00000.05t)ξ
30	1,75763—(0,00011.06—0,00000.009t)t+(0,00011—0,00000.05t)ξ
40	1,75662—(0,00011.50—0,00000.010t)t+(0,00011—0,00000.06t)ξ
50	1,75556—(0,00011.96—0,00000.010t)t+(0,00011—0,00000.06t)ξ
83 0	1,75442—(0,00012.42—0,00000.010t)t+(0,00012—0,00000.07t)ξ
10	1,75322—(0,00012.93—0,00000.011t)t+(0,00012—0,00000.07t)ξ
20	1,75194—(0,00013.48—0,00000.011t)t+(0,00013—0,00000.07t)ξ
30	1,75058—(0,00014.06—0,00000.011t)t+(0,00013—0,00000.08t)ξ
40	1,74913—(0,00014.60—0,00000.012t)t+(0,00014—0,00000.08t)ξ
50	1,74757—(0,00015.22—0,00000.012t)t+(0,00014—0,00000.09t)ξ
84 0	1,74591—(0,00015.95—0,00000.013t)t+(0,00014—0,00000.09t)ξ
10	1,74413—(0,00016.75—0,00000.013t)t+(0,00015—0,00000.09t)ξ
20	1,74222—(0,00017.58—0,00000.014t)t+(0,00016—0,00000.10t)ξ
30	1,74015—(0,00018.50—0,00000.016t)t+(0,00017—0,00000.10t)ξ
40	1,73793—(0,00019.50—0,00000.017t)t+(0,00018—0,00000.10t)ξ
50	1,73554—(0,00020.53—0,00000.018t)t+(0,00019—0,00000.10t)ξ
85 0	1,73296—(0,00021.52—0,00000.020t)t+(0,00020—0,00000.10t)ξ
10	1,73019—(0,00022.53—0,00000.021t)t+(0,00021—0,00000.10t)ξ
20	1,72718—(0,00023.77—0,00000.022t)t+(0,00022—0,00000.11t)ξ
30	1,72390—(0,00025.05—0,00000.023t)t+(0,00023—0,00000.11t)ξ
40	1,72033—(0,00026.45—0,00000.024t)t+(0,00024—0,00000.12t)ξ
50	1,71644—(0,00027.97—0,00000.026t)t+(0,00025—0,00000.12t)ξ
86 0	1,71219—(0,00029.80—0,00000.029t)t+(0,00026—0,00000.13t)ξ
10	1,70752—(0,00031.43—0,00000.032t)t+(0,00028—0,00000.14t)ξ
20	1,70239—(0,00033.27—0,00000.036t)t+(0,00030—0,00000.16t)ξ
0	1,69674—(0,00035.33—0,00000.040t)t+(0,00032—0,00000.17t)ξ

Log. Réfr. app. = Log μ + Log tg θ + B + T + ϖ.

Distance zénithale.	R
85° 0′	$618'',1 + (0'',83 - 0'',001\,t)\,t + 0'',3\,\xi$
10	$635\,,4 + (0\,,83 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,3\,\xi$
20	$653\,,6 + (0\,,84 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,3\,\xi$
30	$672\,,8 + (0\,,85 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,4\,\xi$
40	$693\,,1 + (0\,,85 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,4\,\xi$
50	$714\,,5 + (0\,,85 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,4\,\xi$
86 0	$737\,,1 + (0\,,85 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,5\,\xi$
10	$761\,,1 + (0\,,84 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,5\,\xi$
20	$786\,,5 + (0\,,84 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,6\,\xi$
30	$813\,,3 + (0\,,83 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,6\,\xi$
40	$842\,,1 + (0\,,82 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,7\,\xi$
50	$872\,,6 + (0\,,80 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,7\,\xi$
87 0	$905\,,1 + (0\,,77 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,8\,\xi$
10	$939\,,6 + (0\,,72 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,9\,\xi$
20	$976\,,8 + (0\,,68 - 0\,,002\,t)\,t + (1,0 - 0,01\,t)\,\xi$
30	$1016\,,0 + (0\,,64 - 0\,,002\,t)\,t + (1,1 - 0,01\,t)\,\xi$
40	$1058\,,0 + (0\,,54 - 0\,,001\,t)\,t + (1,2 - 0,01\,t)\,\xi$
50	$1103\,,3 + (0\,,45 - 0\,,001\,t)\,t + (1,4 - 0,01\,t)\,\xi$
88 0	$1152\,,1 + (0\,,35 - 0\,,001\,t)\,t + (1,5 - 0,01\,t)\,\xi$
10	$1204\,,8 + (0\,,22 - 0\,,001\,t)\,t + (1,8 - 0,01\,t)\,\xi$
20	$1260\,,7 + (0\,,04 - 0\,,000\,t)\,t + (1,9 - 0,01\,t)\,\xi$
30	$1321\,,2 - (0\,,17 - 0\,,001\,t)\,t + (2,2 - 0,02\,t)\,\xi$
40	$1386\,,8 - (0\,,43 - 0\,,001\,t)\,t + (2,5 - 0,02\,t)\,\xi$
50	$1456\,,8 - (0\,,75 - 0\,,003\,t)\,t + (2,8 - 0,03\,t)\,\xi$
89 0	$1533\,,2 - (1\,,14 - 0\,,004\,t)\,t + (3,2 - 0,03\,t)\,\xi$
10	$1614\,,0 - (1\,,65 - 0\,,006\,t)\,t + (3,6 - 0,04\,t)\,\xi$
20	$1700\,,4 - (2\,,26 - 0\,,011\,t)\,t + (4,0 - 0,05\,t)\,\xi$
30	$1792\,,2 - (3\,,02 - 0\,,019\,t)\,t + (4,5 - 0,06\,t)\,\xi$
40	$1889\,,5 - (3\,,92 - 0\,,028\,t)\,t + (5,0 - 0,08\,t)\,\xi$

$$\text{Log. Réfr. app.} = \text{Log. } R + B + T + \frac{3}{2}\,\tau.$$

Table III.

donnant les valeurs de B et ξ pour différentes hauteurs du baromètre.

Pouces anglais.	B	ξ	Pouces et lignes français.	B	ξ	Milli-mètres.	B	ξ
25,0	—0,07918	—5,00	$24^p\ 0^l$	—0,06925	—4,42	720	—0,02461	—1,65
1	—0,07745	—4,90	1	—0,06774	—4,33	1	—0,02401	—1,61
2	—0,07572	—4,80	2	—0,06624	—4,24	2	—0,02341	—1,57
3	—0,07400	—4,70	3	—0,06475	—4,16	3	—0,02281	—1,53
4	—0,07229	—4,60	4	—0,06326	—4,07	4	—0,02221	—1,49
5	—0,07058	—4,50	5	—0,06177	—3,98	5	—0,02161	—1,45
6	—0,06888	—4,40	6	—0,06029	—3,89	6	—0,02101	—1,41
7	—0,06719	—4,30	7	—0,05882	—3,80	7	—0,02041	—1,37
8	—0,06550	—4,20	8	—0,05735	—3,71	8	—0,01982	—1,33
9	—0,06392	—4,10	9	—0,05588	—3,62	9	—0,01922	—1,30
26,0	—0,06215	—4,00	10	—0,05442	—3,53	730	—0,01862	—1,26
1	—0,06048	—3,90	11	—0,05297	—3,44	1	—0,01803	—1,22
2	—0,05882	—3,80	25 0	—0,05152	—3,36	2	—0,01744	—1,18
3	—0,05717	—3,70	1	—0,05007	—3,27	3	—0,01684	—1,14
4	—0,05552	—3,60	2	—0,04863	—3,18	4	—0,01625	—1,10
5	—0,05388	—3,50	3	—0,04720	—3,09	5	—0,01566	—1,06
6	—0,05224	—3,40	4	—0,04577	—3,00	6	—0,01507	—1,02
7	—0,05061	—3,30	5	—0,04434	—2,91	7	—0,01448	—0,98
8	—0,04899	—3,20	6	—0,04292	—2,82	8	—0,01389	—0,94
9	—0,04737	—3,10	7	—0,04150	—2,73	9	—0,01330	—0,90
27,0	—0,04576	—3,00	8	—0,04009	—2,65	740	—0,01272	—0,87
1	—0,04415	—2,90	9	—0,03868	—2,56	1	—0,01213	—0,83
2	—0,04255	—2,80	10	—0,03728	—2,47	2	—0,01154	—0,79
3	—0,04096	—2,70	11	—0,03588	—2,38	3	—0,01096	—0,75
4	—0,03937	—2,60	26 0	—0,03449	—2,29	4	—0,01037	—0,71
5	—0,03779	—2,50	1	—0,03310	—2,20	5	—0,00979	—0,67
6	—0,03621	—2,40	2	—0,03171	—2,11	6	—0,00921	—0,63
7	—0,03464	—2,30	3	—0,03033	—2,02	7	—0,00863	—0,59
8	—0,03308	—2,20	4	—0,02895	—1,93	8	—0,00805	—0,55
9	—0,03152	—2,10	5	—0,02758	—1,85	9	—0,00747	—0,51
28,0	—0,02996	—2,00	6	—0,02621	—1,76	750	—0,00689	—0,47

Pouces anglais.	B	ξ	Pouces et lignes français.	B	ξ	Millimètres.	B	ξ
28,0	—0,02996	—2,00	$26^{p}\ 6^{l}$	—0,02621	—1,76	750	—0,00689	—0,47
1	—0,02841	—1,90	7	—0,02485	—1,67	1	—0,00631	—0,43
2	—0,02687	—1,80	8	—0,02349	—1,58	2	—0,00573	—0,39
3	—0,02533	—1,70	9	—0,02213	—1,49	3	—0,00515	—0,35
4	—0,02380	—1,60	10	—0,02078	—1,40	4	—0,00458	—0,31
5	—0,02228	—1,50	11	—0 01944	—1,31	5	—0,00400	—0,27
6	—0,02076	—1,40	27 0	—0,01810	—1,22	6	—0,00343	—0,23
7	—0,01924	—1,30	1	—0,01676	—1,14	7	—0,00285	—0,19
8	—0,01773	—1,20	2	—0,01542	—1,05	8	—0,00228	—0,15
9	—0,01622	—1,10	3	—0,01409	—0,96	9	—0,00171	—0,11
29,0	—0,01472	—1,00	4	—0,01277	—0,87	760	—0,00113	—0,08
1	—0,01323	—0,90	5	—0,01145	—0,78	1	—0,00056	—0,04
2	—0,01174	—0,80	6	—0,01013	—0,69	2	+0,00001	0,00
3	—0,01025	—0,70	7	—0,00881	—0,60	3	+0,00058	+0,04
4	—0,00877	—0,60	8	—0,00750	—0,51	4	+0,00115	+0,08
5	—0,00730	—0,50	9	—0,00620	—0,42	5	+0,00171	+0,12
6	—0,00583	—0,40	10	—0,00490	—0,34	6	+0,00228	+0,16
7	—0,00436	—0,30	11	—0,00360	—0,25	7	+0,00285	+0,20
8	—0,00290	—0,20	28 0	—0,00230	—0,16	8	+0,00341	+0,24
9	—0,00145	—0,10	1	—0,00101	—0,07	9	+0,00398	+0,28
30,0	0,00000	+0,00	2	+0,00028	+0,02	770	+0,00454	+0,32
1	+0,00145	+0,10	3	+0,00156	+0,11	1	+0,00511	+0,36
2	+0,00289	+0,20	4	+0,00284	+0,20	2	+0,00567	+0,39
3	+0,00432	+0,30	5	+0,00411	+0,29	3	+0,00623	+0,43
4	+0,00575	+0,40	6	+0,00538	+0,37	4	+0,00679	+0,47
5	+0,00718	+0,50	7	+0,00665	+0,46	5	+0,00735	+0,51
6	+0,00860	+0,60	8	+0,00792	+0,55	6	+0,00791	+0,55
7	+0,01002	+0,70	9	+0,00918	+0,64	7	+0,00847	+0,59
8	+0,01143	+0,80	10	+0,01044	+0,73	8	+0,00903	+0,63
9	+0,01284	+0,90	11	+0,01169	+0,82	9	+0,00959	+0,67
31,0	+0,01424	+1,00	29 0	+0,01294	+0,91	780	+0,01015	+0,71

Table IV.

donnant les valeurs de T pour les différentes températures t du baromètre, et les valeurs de τ relatives aux différentes températures t de l'air. L'argument t est donné en degrés centigrades.

Arg. t	T	τ	Arg. t	T	τ
	+	+		—	—
— 32°	0,00225	0,05418	+ 0°	0,00000	0,00000
— 31	0,00218	0,05238	1	0,00007	0,00159
— 30	0,00211	0,05059	2	0,00014	0,00317
— 29	0,00204	0,04880	3	0,00021	0,00475
— 28	0,00197	0,04702	4	0,00028	0,00632
— 27	0,00190	0,04523	5	0,00035	0,00789
— 26	0,00183	0,04349	6	0,00042	0,00945
— 25	0,00176	0,04174	7	0,00049	0,01100
— 24	0,00169	0,03999	8	0,00056	0,01255
— 23	0,00162	0,03825	9	0,00063	0,01409
— 22	0,00155	0,03651	10	0,00070	0,01563
— 21	0,00147	0,03478	11	0,00077	0,01716
— 20	0,00140	0,03306	12	0,00084	0,01869
— 19	0,00133	0,03135	13	0,00091	0,02021
— 18	0,00126	0,02964	14	0,00098	0,02173
— 17	0,00119	0,02794	15	0,00105	0,02324
— 16	0,00112	0,02624	16	0,00112	0,02475
— 15	0,00105	0,02456	17	0,00119	0,02625
— 14	0,00098	0,02288	18	0,00126	0,02774
— 13	0,00091	0,02120	19	0,00133	0,02924
— 12	0,00084	0,01953	20	0,00140	0,03072
— 11	0,00077	0,01787	21	0,00147	0,03220
— 10	0,00070	0,01622	22	0,00154	0,03368
— 9	0,00063	0,01457	23	0,00161	0,03515
— 8	0,00056	0,01292	24	0,00168	0,03661
— 7	0,00049	0,01129	25	0,00175	0,03807
— 6	0,00042	0,00966	26	0,00182	0,03953
— 5	0,00035	0,00803	27	0,00189	0,04098
— 4	0,00028	0,00641	28	0,00196	0,04243
— 3	0,00021	0,00480	29	0,00203	0,04387
— 2	0,00014	0,00320	30	0,00210	0,04530
— 1	0,00007	0,00160	31	0,00217	0,04673
— 0°	0,00000	0,00000	+ 32	0,00224	0,04816
	+	+		—	—

TABLES DES RÉFRACTIONS

D'APRÈS L'HYPOTHÈSE DE IVORY.

Distance zénithale	Log μ.
81° 0	1,76460—(0,00008.12—0,00000.003t)t+(0,00007.5—0,00000.05t)ξ
10	1,76399—(0,00008.39—0,00000.003t)t+(0,00007.7—0,00000.05t)ξ
20	1,76334—(0,00008.66—0,00000.004t)t+(0,00008.0—0,00000.05t)ξ
30	1,76266—(0,00008.94—0,00000.004t)t+(0,00008.3—0,00000.06t)ξ
40	1,76194—(0,00009.23—0,00000.004t)t+(0,00008.6—0,00000.06t)ξ
50	1,76119—(0,00009.55—0,00000.004t)t+(0,00009.0—0,00000.06t)ξ
82 0	1,76039—(0,00009.88—0,00000.004t)t+(0,00009.3—0,00000.07t)ξ
10	1,75956—(0,00010.24—0,00000.004t)t+(0,00009.6—0,00000.07t)ξ
20	1,75866—(0,00010.63—0,00000.004t)t+(0,00010.0—0,00000.07t)ξ
30	1,75772—(0,00011.04—0,00000.004t)t+(0,00010.4—0,00000.08t)ξ
40	1,75671—(0,00011.45—0,00000.004t)t+(0,00010.8—0,00000.08t)ξ
50	1,75565—(0,00011.89—0,00000.005t)t+(0,00011.2—0,00000.09t)ξ
83 0	1,75451—(0,00012.33—0,00000.005t)t+(0,00011.6—0,00000.09t)ξ
10	1,75332—(0,00012.87—0,00000.006t)t+(0,00012.1—0,00000.09t)ξ
20	1,75205—(0,00013.42—0,00000.007t)t+(0,00012.6—0,00000.09t)ξ
30	1,75070—(0,00013.97—0,00000.007t)t+(0,00013.1—0,00000.10t)ξ
40	1,74926—(0,00014.55—0,00000.008t)t+(0,00013.7—0,00000.10t)ξ
50	1,74772—(0,00015.19—0,00000.008t)t+(0,00014.3—0,00000.11t)ξ
84 0	1,74607—(0.00015.87—0,00000.009t)t+(0,00015.0—0,00000.12t)ξ
10	1,74430—(0,00016.59—0,00000.009t)t+(0,00015.6—0,00000.12t)ξ
20	1,74239—(0,00017.38—0,00000.010t)t+(0,00016.2—0,00000.13t)ξ
30	1,74036—(0,00018.20—0,00000.011t)t+(0,00017.0—0,00000.13t)ξ
40	1,73816—(0,00019.00—0,00000.011t)t+(0,00017.8—0,00000.14t)ξ
50	1,73581—(0,00019.93—0,00000.012t)t+(0,00018.7—0,00000.15t)ξ
85 0	1,73326—(0,00020.97—0,00000.012t)t+(0,00019.6—0,00000.16t)ξ
10	1,73051—(0,00022.02—0,00000.013t)t+(0,00020.7— 0,00000.17t)ξ
20	1,72752—(0,00023.17—0,00000.014t)t+(0,00021.6—0,00000.18t)ξ
30	1,72429—(0,00024.47—0,00000.015t)t+(0,00022.9—0,00000.19t)ξ
40	1,72076—(0,00025.75—0,00000.017t)t+(0,00024.1—0,00000.20t)ξ
50	1,71691—(0,00027.24—0,00000.020t)t+(0,00025.6—0,00000.21t)ξ
86 0	1,71269—(0,00028.77—0,00000.024t)t+(0,00026.8—0,00000.22t)ξ
10	1,70807—(0,00030.45—0,00000.027t)t+(0,00028.3—0,00000.24t)ξ
20	1,70306—(0,00032.25—0,00000.029t)t+(0,00030.0—0,00000.25t)ξ
30	1,69752—(0,00034.20—0,00000.031t)t+(0,00031.7—0,00000.27t)ξ
40	1,69141—(0,00036.30—0,00000.033t)t+(0,00033.8—0,00000.29t)ξ
50	1,68462—(0,00038.60—0,00000.036t)t+(0,00035.8—0,00000.31t)ξ
87 0	1,67706—(0,00041.07—0,00000.040t)t+(0,00038.0—0,00000.34t)ξ

Log Réfr. app. = Log μ + Log tg θ + B + T + τ.

Distance zénithale	R.
85° 0′	$618'',4 + (0'',84 - 0'',001\,t)\,t + 0'',3\,\xi$
10	$635\,,8 + (0\,,85 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,3\,\xi$
20	$654\,,1 + (0\,,85 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,3\,\xi$
30	$673\,,4 + (0\,,86 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,3\,\xi$
40	$693\,,7 + (0\,,86 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,4\,\xi$
50	$715\,,2 + (0\,,86 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,4\,\xi$
86 0	$738\,,0 + (0\,,87 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,5\,\xi$
10	$762\,,1 + (0\,,87 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,5\,\xi$
20	$787\,,6 + (0\,,87 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,5\,\xi$
30	$814\,,8 + (0\,,86 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,6\,\xi$
40	$843\,,7 + (0\,,85 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,7\,\xi$
50	$874\,,4 + (0\,,85 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,7\,\xi$
87 0	$907\,,1 + (0\,,84 - 0\,,001\,t)\,t + 0\,,8\,\xi$
10	$942\,,2 + (0\,,79 - 0\,,002\,t)\,t + 0\,,9\,\xi$
20	$979\,,7 + (0\,,74 - 0\,,002\,t)\,t + (1\,,0 - 0{,}01\,t)\,\xi$
30	$1019\,,6 + (0\,,69 - 0\,,002\,t)\,t + (1\,,3 - 0{,}01\,t)\,\xi$
40	$1062\,,5 + (0\,,64 - 0\,,002\,t)\,t + (1\,,2 - 0{,}01\,t)\,\xi$
50	$1108\,,8 + (0\,,56 - 0\,,001\,t)\,t + (1\,,4 - 0{,}01\,t)\,\xi$
88 0	$1158\,,8 + (0\,,47 - 0\,,001\,t)\,t + (1\,,5 - 0{,}01\,t)\,\xi$
10	$1212\,,6 + (0\,,35 - 0\,,001\,t)\,t + (1\,,8 - 0{,}02\,t)\,\xi$
20	$1270\,,8 + (0\,,23 - 0\,,001\,t)\,t + (2\,,1 - 0{,}02\,t)\,\xi$
30	$1334\,,0 + (0\,,06 - 0\,,000\,t)\,t + (2\,,3 - 0{,}02\,t)\,\xi$
40	$1402\,,6 - (0\,,11 - 0\,,000\,t)\,t + (2\,,5 - 0{,}03\,t)\,\xi$
50	$1477\,,3 - (0\,,40 - 0\,,001\,t)\,t + (2\,,8 - 0{,}03\,t)\,\xi$
89 0	$1558\,,4 - (0\,,70 - 0\,,002\,t)\,t + (3\,,2 - 0{,}04\,t)\,\xi$
10	$1647\,,4 - (1\,,09 - 0\,,004\,t)\,t + (3\,,7 - 0{,}05\,t)\,\xi$
20	$1745\,,1 - (1\,,55 - 0\,,006\,t)\,t + (4\,,3 - 0{,}06\,t)\,\xi$
30	$1851\,,5 - (2\,,13 - 0\,,009\,t)\,t + (5\,,0 - 0{,}07\,t)\,\xi$
40	$1969\,,2 - (2\,,84 - 0\,,014\,t)\,t + (5\,,8 - 0{,}09\,t)\,\xi$
50	$2099\,,2 - (3\,,72 - 0\,,019\,t)\,t + (6\,,7 - 0{,}11\,t)\,\xi$
90 0	$2242\,,4 - (4\,,82 - 0\,,027\,t)\,t + (7'',9 - 0{,}14\,t)\,\xi$

$$\text{Log Réfr. app.} = \text{Log}\,R + B + T + \frac{3}{2}\tau.$$

COMPARAISON DES RÉFRACTIONS OBSERVÉES AVEC LA THÉORIE ADMISE.

Avant de comparer les réfractions calculées d'après la nouvelle théorie avec les réfractions observées, je montrerai la différence qui existe entre les premières et celles qui dérivent des autres théories. Je me contente de présenter les résultats de la comparaison des tables de Bessel, de M. Gylden et de Ivory, en laissant de côté toutes les autres, par la raison que la loi de température des couches atmosphériques, adoptée dans ces dernières, est comprise entre les limites données par la théorie de Bessel et celle de Ivory, et se rapproche beaucoup de celle de M. Gylden.

Le décroissement de température qui résulte de l'hypothèse de Bessel est, comme on sait, très lent pour les couches inférieures, mais il augmente progressivement pour les couches plus élevées. Dans la théorie de Ivory, qui est presque identique à celle de Laplace, c'est l'inverse qui a lieu, c'est à dire, le décroissement de température est sensiblement plus fort dans les couches inférieures et devient considérablement plus faible dans les hautes régions de l'atmosphère. Dans les nouvelles tables de réfractions que j'ai calculées en partant de la loi de densité des couches atmosphériques qui découle de la théorie exposée dans le paragraphe 6 de ce mémoire, l'abaissement de température est variable dans les différentes saisons de l'année, mais, en été, il est plus prononcé que dans l'hypothèse de Laplace et de Ivory.

Cette diversité de variation de la densité de l'air atmosphérique doit produire, comme conséquence, les différences de la réfraction tirée de l'une et de l'autre théorie. Le tableau qui suit les montre effectivement surtout pour les hauteurs très petites de l'astre. Ce tableau ne contient que les réfractions moyennes correspondant à la température zéro de l'air et à la hauteur de 760

millimètres de la colonne barométrique. Les réfractions de Bessel sont empruntées des „Tabulae regiomontanae". On sait que Bessel a reproduit les réfractions de „Fundamenta" dans les T. R. en augmentant les premières dans le rapport de l'unité à 1,003282. Mais cette augmentation étant trop forte dans le voisinage de l'horizon il préféra calculer ces dernières à l'aide des observations en ne se servant de la théorie que comme moyen d'interpolation. Par cette raison les tables de Bessel cessent d'être continues à la distance zénithale égale à 85°.

Les réfractions de M. Gylden sont tirées de son mémoire „Untersuchungen über die Constitution in der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Petersburg. 1866". La quantité i y désigne le rapport de la variation du paramètre qui entre dans son hypothèse sur la loi de température dans l'atmosphère à la valeur moyenne de ce paramètre. En posant $i=-1$ on doit trouver les réfractions relatives à l'hypothèse de la température constante dans toute l'atmosphère.

Quant aux réfractions relatives à l'hypothèse de Ivory il devenait nécessaire de les calculer de nouveau car l'approximation avec laquelle Ivory a construit ses tables est insuffisante, comme nous l'avons expliqué à la page 30. Le calcul a été exécuté à l'aide des formules (21). A cette occasion j'ai modifié le paramètre f, en adoptant, au lieu de $f=\frac{2}{9}$, la valeur $f=0{,}23456+\beta t$, t étant la température donnée par le thermomètre centigrade, et β désignant le coefficient de dilatation de l'air.

Distance zénithale.	Bessel.	Gylden [1].	Ivory.	Tables nouvelles.
45°	60″,32	60″,32	60″,31	60″,31
50	71 ,85	71 ,86	71 ,84	71 ,84
55	86 ,04	86 ,05	86 ,05	86 ,04
60	104 ,23	104 ,25	104 ,23	104 ,23

[1] Les coefficients numériques de la quantité i sont donnés ici d'après le calcul de M. Fuss. Voyez son mémoire «Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes». Petersburg. 1872.

65	128″,82	128″,85	128″,83	128″,83
70	164 ,50	164 ,55	164 ,54	164 ,53
75	221 ,91	222 ,04	222 ,03	222 ,02
80	331 ,05	331 ,35 — 0″,13 i	331 ,35	331 ,35
82	408 ,24	408 ,66 — 0 ,33 i	408 ,56	408 ,71
84	528 ,00	528 ,41 — 1 ,03 i	528 ,38	528 ,63
85	615 ,81 613 ,9	616 ,17 — 1 ,95 i	616 ,05	616 ,40
86	734 ,9	734 ,9 — 3 ,87 i	734 ,8	735 ,2
87	900 ,4	902 ,1 — 8 ,22 i	902 ,0	902 ,6
88	1150 ,7	1150 ,3 — 18 ,56 i	1149 ,3	1149 ,1
89	1556 ,4	1541 ,7 — 44 ,47 i	1536 ,9	1529 ,0
89° 30′	1860 ,1	1826 ,8 — 70 ,30 i	1816 ,5	1787 ,2.

Un simple aperçu de ce tableau nous montre que la diversité des lois de température, adoptées pour base du calcul, ne se fait sentir, dans la valeur de la réfraction, que pour des distances zénithales très petites, et que la variation de la réfraction correspondant à un degré de variation de la distance zénithale près de l'horizon est d'autant plus faible que l'abaissement de température de l'atmosphère, dans ses couches inférieures, est plus grand. Il est encore visible que, dans les réfractions de M. Gylden, il est impossible d'assigner à la quantité i une valeur qui soit capable de faire coïncider ces réfractions avec les réfractions données dans la dernière colonne.

La variation de la réfraction due à la variation de la température de l'air est une fonction de l'hypothèse sur la constitution de l'atmosphère, et, par cette raison, elle est différente dans les différentes théories. Le tableau suivant donnant la quantité qu'on doit ajouter à la réfraction moyenne pour obtenir la réfraction correspondant à l'indication t du thermomètre centigrade et à la hauteur du baromètre de 760 millimètres, fait voir l'étendue de cette variation:

Distance zénithale.	Gylden.	Ivory.	Tables nouvelles.
85° 0′	— 2″,56t +0″,010 t^2	— 2″,57 t+0″,010 t^2	— 2″,58 t+0″,010t^2
86 0	— 3 ,17t +0 ,013 t^2	— 3 ,20 t+ 0 ,012 t^2	— 3 ,21 t+ 0 ,013t^2
87 0	— 4 ,09t +0 ,017 t^2	— 4 ,19 t+ 0 ,016 t^2	— 4 ,22 t+ 0 ,017t^2
88 0	— 5 ,63t +0 ,024 t^2	— 5 ,89 t+ 0 ,025 t^2	— 6 ,01 t+ 0 ,026t^2
89 0	— 8 ,40t +0 ,039 t^2	— 9 ,12 t+ 0 ,042 t^2	— 9 ,63 t+ 0 ,050t^2
89 30	—10 ,57t +0 ,050 t^2	—11 ,96 t+ 0 ,065 t^2	—12 ,99 t+ 0 ,082t^2

L'excès des réfractions fournies par les tables de M. Gylden sur celles données par les tables nouvelles s'élève aux quantités suivantes:

85°	0′	— 0″,2	— 1″,95 i + 0″,02 t — 0″,000 t^2
86	0	— 0 ,3	— 3 ,87 i + 0 ,04 t — 0 ,000 t^2
87	0	— 0 ,5	— 8 ,22 i + 0 ,13 t — 0 ,000 t^2
88	0	+ 1 ,2	— 18 ,56 i + 0 ,38 t — 0 ,002 t^2
89	0	+ 12 ,7	— 44 ,47 i + 1 ,23 t — 0 ,011 t^2
89	30	+ 39 ,6	— 70 ,30 i + 2 ,42 t — 0 ,032 t^2

M. Fuss, désirant mettre à l'epreuve les tables de M. Gylden et trouver les valeurs de t relatives à chaque mois de l'année, a fait à Poulkova, pendant les années 1867, 1868 et 1869, les observations des réfractions près de l'horizon. Dans son mémoire cité plus haut il donne (p. 38) les valeurs de cette quantité. Il trouva ces valeurs à l'aide des observations des distances zénithales qui ne dépassent pas 89°, jugeant avec raison que les réfractions relatives aux distances plus grandes que 89° sont trop affectées par les causes locales.

Les plus petites valeurs de i, d'après M. Fuss, ont lieu aux mois d'Avril et d'Octobre; pour le premier on a $i = +0{,}05$ et pour le second $i = -0{,}10$. La température moyenne d'Avril correspondant aux jours d'observation donnait $t = -2{,}6$ et celle d'Octobre s'élevait à $t = +2{,}6$. Si nous prenons la moyenne nous aurons relativement pour ces deux mois $i = -0{,}025$ et $t = 0$.

La valeur maximum positive de i avait lieu au mois d'Août, et elle s'élevait à $i = 0{,}74$, la température moyenne étant égale à $+12{,}6$.

La valeur maximum négative correspondant au mois de Décembre donnait $i = -0{,}45$, la température moyenne relative étant égale à $-13{,}0$.

D'après ces données, nous avons calculé le tableau suivant qui présente les erreurs des réfractions calculées, au moyen des tables nouvelles, c'est à dire les quantités qu'on doit ajouter aux réfractions calculées pour obtenir les réfractions observées à Poulkova.

Distance zénithale.	Août. $i = +0,74$ $t = +12,6$	Avril et Octobre. $i = -0,025$ $t = 0;0$	Décembre. $i = -0,45$ $t = -13,0$
85° 0′	−1″,4	− 0″,1	+ 0″,4
86 0	− 2 ,7	− 0 ,8	+ 0 ,9
87 0	− 4 ,9	− 0 ,3	+ 1 ,9
88 0	− 8 ,1	+ 1 ,7	+ 4 ,3
89 0	− 6 ,5	+13 ,8	+14 ,9.

Il paraît d'après ce tableau que les réfractions observées à Poulkova accusent une petite erreur dans la valeur du coefficient proportionnel à la température de l'air. Si cette conclusion est confirmée par les observations ultérieures il sera difficile d'en rendre compte.

Il est évident que toutes les perturbations locales ou accidentelles peuvent occasionner quelques déformations des couches aériennes en altérant leur horizontalité, mais les erreurs qui en résultent, variant d'un jour à l'autre, doivent s'éliminer dans un grand nombre d'observations. La plupart des perturbations affaiblit la rapidité avec laquelle la température des couches inférieures de l'air décroit avec leur hauteur; cela produit toujours l'augmentation de la réfraction, ce qui se trouve pleinement confirmé par les observations. Mais, dans le cas qui nous occupe, il ne s'agit pas de l'erreur constante qui conserve sa valeur durant toute l'année, mais d'une erreur variable, il doit donc exister une cause qui, variant avec les saisons, rend les réfractions observées en hiver plus fortes qu'en été. L'humidité de l'air atmosphérique constitue une source de la chaleur qui peut échauffer irrégulièrement les différentes couches de l'atmosphère, et, par cela même, elle est capable de troubler l'état normal de l'équilibre. On sait que, pendant l'hiver, l'humidité de l'air approche beaucoup de sa valeur maximum tandis qu'elle en est sensiblement éloignée en été; par conséquent l'excès de la vapeur, et le dégagement de la chaleur qui en résulte, doivent avoir lieu plus fréquemment en hiver qu'en été. Cette chaleur, se communiquant aux couches atmosphériques, tend à diminuer la valeur du paramètre qui entre dans la fonc-

tion qui exprime la température de ces couches, et produit l'augmentation de la réfraction.

Cette explication paraît être justifiée par la prépondérance des réfractions irrégulières, ordinairement trop fortes, observées en hiver sur celles observées en été.

Les observations que j'ai faites à Kasan ne présentent pas d'erreurs progressives croissant avec la température de l'air, et, par cette raison, nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire d'augmenter le coefficient thermométrique trouvé par la théorie. Ces dernières observations se rapportant principalement au soleil à son coucher, et la plupart des observations de Poulkova se rapportant aux étoiles, c'est à dire, étant faites à des heures avancées de la nuit où le refroidissement très fort du sol devait troubler la loi normale de température dans les couches inférieures de l'air, il est donc possible que le désaccord qui se présente dans la valeur du coefficient thermométrique trouvé à l'aide des unes et des autres observations tienne à cette dernière circonstance.

Les observations de Kasan renferment deux séries: la première qui est donnée plus loin contient les observations exécutées au moyen de l'instrument universel; la seconde série contient les réfractions observées occasionnellement à l'aide du cercle méridien; les dernières ont été faites pour la plupart en hiver.

En mettant les observations de la première série en groupes suivant les hauteurs apparentes de l'astre observé je suis arrivé aux valeurs suivantes des erreurs des réfractions calculées correspondant aux trois températures moyennes: $+22°,2$, $+7°,9$ et $-6°,7$:

La réfraction observée moins la réfraction calculée.

Hauteur apparente.	Température de l'air.		
	+ 22,2	+ 7,9	— 6,7
de 3° à 4°	— 1″,4	+ 3″,1	— 1″,2
2 3	— 2 ,9	— 0 ,6	— 0 ,4
1 2	+ 0 ,8	+ 4 ,2	+ 3 ,5
0,5 1	+ 18 ,3	+ 44 ,3	+ 50 ,1

Ce tableau montre que, pour les différentes températures de l'air, les erreurs des réfractions calculées correspondant à des hauteurs de l'astre dépassant un degré sont presque constantes et assez petites. Quant aux réfractions relatives à des hauteurs moindres qu'un degré les irrégularités que les observations présentent sont trop fortes pour que l'on puisse en tirer une conclusion juste sur la variation de la réfraction dépendant de la température de l'air.

L'emplacement de l'observatoire de Kasan au milieu d'une vallée dont les bords s'élèvent progressivement fait que le dernier rayon lumineux, parcourant une grande étendue très près du sol, doit être sujet à une influence très forte causée par l'irrégularité de l'échauffement des dernières couches atmosphériques. Comme la hauteur apparente de ce bord est assez sensible, variant de 0° 8′ dans la direction du méridien jusqu'à 0° 30′ vers l'ouest, et au delà tombant à zéro dans la direction du Volga pour augmenter de nouveau de l'autre côté de ce fleuve, il est donc visible que, non seulement l'observation de la réfraction horizontale devenait impossible, mais que les réfractions correspondant à des hauteurs petites ne pouvait être libres de l'influence locale. Dans le tableau précédent je n'ai pas pris en considération les observations du 17 et du 18 Mars de l'année, 1868, comme donnant les réfractions trop exagérées.

Dans les tableaux qui suivent la hauteur du baromètre est réduite à la température zéro du mercure; la température de l'air est donnée en degrés centigrades.

I Série.

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
3 Sept. 1867.	*Le soleil.*				+	
17h14′ 59″,5	2°32′ 55″,7 *b. i.*	2°18′ 5″,5	890″,2	750,0	20,6	— 6″,5
16 34,8	20 22,7	4 55,0	927,7			— 12,8
17 37,4	12 17,7	1 56 15,8	961,9			— 9,6
19 59,8	1 53 58,1	36 36,3	1041,8			— 6,5
21 17,6	43 56,7	25 53,1	1083,6			— 11,4
22 31,1	34 50,7	15 45,6	1145,1			+ 6,2
26 30,6	4 44,0	0 42 47,9	1316,1			+ 9,0
27 34,1	0 56 54,5	34 6,8	1367,7			+ 11
28 49,8	47 25,9	23 43,5	1422,4			+ 4
29 49,0	40 24,9	15 36,5	1488,4			+ 20
30 49,8	32 54,7	0 7 17,6	1537,1			+ 16
31 54,8	25 26,2	—0 1 35,8	1622,0			+ 31
33 8,8	0 17 22,3	—0 11 44,4	1746,7			+108
34 5,5	0 37 55,1 *b. s.*	+0 12 20,8	1534,3			+ 36
35 3,6	30 37,6	+0 4 26,1	1571,5			+ 33
36 4,5	23 29,8	—0 3 52,8	1642,6			+ 50
37 4,8	0 17 21,1	—0 12 5,1	1757,2	750,0	19,5	+117
4 Sept.	*Le soleil.*					
17 28 35,8	0 59 35,3 *b. i.*	0 37 3,4	1351,9			+ 7,4
29 43,8	1 19 56,3 *b. s.*	0 59 30,9	1225,4			+ 1,6
31 16,3	0 39 33,5 *b. i.*	0 15 0,2	1473,3			— 3
32 30,3	30 25,3	+0 4 50,9	1534,4			— 5
33 21,6	24 39,8	—0 2 11,1	1610,9	754,1	20,5	+ 30
35 15,1	0 39 0,1 *b. s.*	+0 14 4,6	1495,5			+ 16
36 15,3	31 45,1	+0 5 50,5	1554,5			+ 24
37 15,3	24 33,7	—0 2 21,5	1615,2			+ 33
38 11,6	0 18 19,9	—0 10 2,8	1702,7			+ 74
8 Sept.	*Le soleil.*					
17 30 17,6	1 29 13,2 *b i.*	1 8 27,9	1245,3	757,4	13,75	+ 24,0
31 40,6	18 22,3	0 56 55,8	1286,5			+ 2,3
33 1,4	8 3,0	45 42,5	1330,5			— 8,4
34 4,1	1 0 31,4	37 0,5	1410,9			+ 11,7
34 59,4	0 53 44,8	29 20,3	1464,5			+ 20
36 6,6	45 39,2	20 1,4	1537,8			+ 34

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
8 Sept.	*Le soleil.*				+	
$17^h 37' 7'',4$	$0°38' 2'',9$ *b. i.*	$0°11' 36'',1$	$1586'',8$	757,4	13,75	+ 24
38 10,4	0 30 29,5	0 2 52,8	1656,7			+ 39
39 23,9	0 49 41,6 *b. s.*	0 24 33,2	1508,4			+ 35
40 24,9	42 6,4	16 7,2	1559,2			+ 31
41 24,6	34 41,2	0 7 52,4	1608,8			+ 23
42 24,6	0 27 22,9	—0 0 24,6	1667,5	757,4	13,5	+ 16
20 Sept.	*Le soleil.*					
17 32 17,7	3 18 49,7 *b. i.*	3 5 16,9	812,8	753,2	8,1	+ 8'',1
33 40,5	7 41,6	2 53 40,4	841,2			+ 4,1
34 47,7	2 58 36,1	44 14,3	861,8			— 3,5
35 40,0	51 39,7	36 54,5	885,2			+ 0,5
37 28,1	3 7 41,5 *b. s.*	2 53 40,8	840,7			+ 3,1
38 36,9	2 58 36,6	44 2,2	874,4			+ 9,1
39 38,7	50 17,5	35 20,7	896,8			+ 4,1
41 4,3	2 38 53,9	2 23 20,0	933,9			+ 1,4
43 47,3	1 47 46,5 *b. i.*	1 28 30,1	1156,4	753,2	7,6	+ 3,6
45 0,5	38 23,9	18 13,0	1210,9			+ 8,2
45 55,8	31 16,1	10 27,4	1248,7			+ 6,4
46 49,0	24 28,0	2 58,8	1289,2			+ 6,3
47 37,7	18 10,2	0 56 8,1	1322,1			+ 0,1
48 31,2	11 25,3	48 37,7	1367,6			+ 1,2
49 40,2	1 2 49,9	38 56,8	1433,1			+ 7,5
51 1,0	0 52 50,9	27 35,7	1515,2			+ 17
51 58,5	0 45 46,2	19 31,2	1575,0			+ 22
53 23,2	1 3 36,3 *b. s.*	0 39 34,4	1441,9			+ 21
56 37,5	0 12 30,3 *b. i.*	—0 19 38,5	1928,8			+ 93
57 39,0	5 12,3	— 28 16,3	2008,6			+103
58 17,0	0 1 7,1	— 33 36,2	2083,3			+137
59 50,0	0 16 59,3 *b. s.*	— 14 42,4	1901,7			+106
18 0 50,0	10 0,4	— 23 7,3	1987,7			+107
1 48,0	0 3 13,4	—0 31 15,4	2068,8	752,7	7,0	+143
23 Sept.	*Le soleil.*					
17 40 5,5	2 46 39,9 *b. i.*	2 32 18,4	861,5	749,9	15,25	— 11,6
41 26,8	35 48,3	20 55,0	893,3			— 14,2
42 39,8	26 14,5	10 41,3	933,2			— 9,7
43 58,3	15 58,4	1 59 41,1	977,3			— 4,8
					18	

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
23 Sept.	*Le soleil.*				+	
$17^h\,45'\,25'',0$	$2°\ 4'\ 25'',0$ *b. i.*	$1°\,47'\,31'',7$	1003,3	749,9	15,25	— 16,7
46 21,5	1 57 14,4	39 36,4	1058,0			— 3,0
47 18,0	49 56,6	31 40,9	1095,7			+ 0,3
48 19,5	42 0,8	23 3,2	1137,6			+ 4,2
49 23,3	33 36,6	14 6,0	1170,6			— 5,5
50 21,8	26 7,7	5 53,6	1214,1			— 2,4
51 19,0	18 40,6	0 57 51,9	1248,7			— 10,5
52 20,5	11 11,9	49 13,9	1318,0			+ 14,4
53 26,3	1 2 45,4	39 59,6	1365,8			+ 8,4
54 27,8	0 54 52,8	31 21,6	1411,2			+ 1
55 41,3	46 1,0	21 2,5	1498,5			+ 27
56 58,3	36 44,9 *b. i.*	10 13,0	1591,9			+ 53
58 4,3	28 24,9	0 0 57,6	1647,3			+ 46
58 48,8	22 41,9	—0 5 17,3	1679,2			+ 34
59 47,0	16 2,9	13 27,6	1770,5			+ 72
18 0 57,0	7 49,1	23 17,5	1866,6			+100
1 48,3	0 2 14,4 *b. i.*	30 29,9	1964,3			+152
2 53,8	0 20 39,4 *b. s.*	—0 7 43,7	1703,1			+ 42
4 1,8	12 34,8	17 16,9	1791,7	749,9	15,0	+ 65
3 Octobre.	*Le soleil.*					
18 1 18,0	1 42 45,3 *b. i.*	1 23 7,2	1178,1	758,6	8,1	— 8,1
3 9,0	28 36,6	1 7 44,3	1252,3			— 11,5
4 18,5	19 53,6	0 58 5,9	1307,7			— 10,6
5 37,2	1 10 6,0	47 10,6	1375,4			— 6,5
7 36,3	0 55 10,2	30 37,9	1472,3			— 14
9 3,2	44 49,9	18 33,1	1578,8			+ 11
10 10,5	36 24,7	9 11,4	1633,3			+ 0
11 16,5	0 28 21,3 *b. i.*	0 0 0,0	1701,3			— 2
12 57,0	0 44 40,4 *b. s.*	0 18 3,6	1596,8			+ 31
13 57,1	37 5,9	9 40,9	1665,0			+ 18
15 0,6	29 36,0	0 0 53,7	1722,3			+ 34
15 38,5	25 2,4 *b. s.*	—0 4 28,2	1770,6	758,6	8,0	+ 43
4 Octobre.	*Le soleil.*					
17 59 57,5	2 2 48,3 *b. i.*	1 45 7,3	1061,0			— 13,7
18 1 24,2	1 51 36,5	33 9,0	1107,5			— 20,9
2 36,1	42 30,6	23 12,9	1157,7			— 17,3

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
4 Octobre.	*Le soleil.*				+	
17h 3′ 36″,7	1°35′ 4″,1 *b. i.*	1°14′ 50″,1	1214″,0			— 1″,1
4 42 ,0	26 54 ,6	1 5 47 ,9	1266 ,7			+ 5 ,0
5 57 ,7	17 27 ,8	0 55 21 ,0	1326 ,8			+ 7 ,4
7 33 ,2	1 5 23 ,1	42 4 ,9	1398 ,2			— 0 ,7
8 31 ,1	0 58 10 ,2	34 3 ,9	1446 ,3			— 4
9 37 ,2	50 3 ,4	24 52 ,7	1510 ,7			+ 3
10 33 ,7	43 56 ,1	17 2 ,0	1562 ,0			+ 8
11 29 ,0	36 56 ,7	9 14 ,8	1661 ,9			+ 53
12 35 ,8	29 0 ,9	+0 0 3 ,9	1737 ,0	762,6	10,45	+ 66
13 22 ,7	0 24 8 ,3 *b. i.*	−0 6 27 ,4	1835 ,7			+123
14 23 ,5	0 43 53 ,1 *b. s.*	+0 17 17 ,3	1595 ,8			+ 41
15 18 ,8	37 9 ,6	9 27 ,4	1682 ,2			+ 55
16 11 ,7	30 28 ,9	+0 2 5 ,5	1703 ,4			+ 43
17 15 ,7	0 23 35 ,1 *b. s.*	−0 6 49 ,3	1824 ,4			+107
6 Octobre.	*Le soleil.*					
18 4 51 ,4	1 45 36 ,0 *b. i.*	1 26 20 ,1	1155 ,9	764,4	13,4	+ 7 ,7
6 33 ,2	32 39 ,4	12 19 ,4	1220 ,0			+ 2 ,5
7 31 ,4	25 28 ,2	1 4 18 ,2	1270 ,0			+ 13 ,1
9 50 ,9	1 7 48 ,4	0 45 3 ,7	1364 ,7			— 2 ,0
11 26 ,9	0 55 59 ,7	31 48 ,2	1451 ,5			+ 5
12 29 ,3	48 33 ,1	23 10 ,3	1522 ,8			+ 22
13 23 ,5	41 53 ,1	15 40 ,6	1572 ,5			+ 24
14 56 ,4	0 31 14 ,1 *b. i.*	0 2 49 ,0	1705 ,1			+ 74
17 16 ,6	0 41 39 ,4 *b. s.*	0 15 32 ,8	1566 ,6			+ 16
18 15 ,2	35 15 ,7	7 24 ,3	1671 ,4			+ 72
19 9 ,4	0 28 28 ,9	−0 0 10 ,5	1719 ,4	763,0	13,0	+ 67
7 Octobre.	*Le soleil.*					
18 6 45 ,3	1 41 0 ,7 *b. i.*	1 21 36 ,4	1164 ,3	760,8	14,75	+ 6 ,0
8 20 ,5	28 49 ,3	8 31 ,3	1218 ,0			— 5 ,8
9 20 ,0	21 23 ,8	1 0 20 ,4	1263 ,4			— 2 ,7
10 18 ,0	14 22 ,2	0 52 21 ,6	1320 ,6			+ 11 ,8
11 18 ,0	1 6 44 ,4	44 5 ,9	1358 ,5			+ 0 ,2
12 14 ,7	0 59 49 ,7	36 16 ,3	1413 ,4			+ 18
13 17 ,0	52 2 ,2	27 41 ,7	1462 ,5			+ 5
14 24 ,0	43 52 ,2	18 27 ,0	1525 ,2			+ 8
15 44 ,3	0 34 20 ,2 *b. i.*	0 7 21 ,2	1619 ,0			+ 30

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
7 Octobre.	*Le soleil.*				+	
$18^h 17' 11'',7$	$0°52' 9'',3$ *b. i.*	$0°27' 22'',4$	$1486'',8$			+ 30
18 12 ,6	44 14 ,2	18 57 ,4	1516 ,8			+ 3
19 13 ,7	37 9 ,1	10 29 ,6	1599 ,5			+ 32
20 26 ,3	0 28 37 ,1	0 0 27 ,1	1690 ,0	760,5	14,0	+ 56
8 Octobre.	*Le soleil.*					
18 10 44 ,2	1 20 56 ,4 *b. i.*	0 59 47 ,3	1269 ,1	760,4	15,8	+ 9'',6
11 48 ,9	12 37 ,9	50 54 ,5	1303 ,4			— 6 ,6
12 51 ,3	1 5 1 ,4	42 20 ,2	1361 ,2			+ 2 ,0
13 49 ,0	0 58 7 ,9	34 24 ,3	1423 ,6			+ 18
14 53 ,0	50 8 ,3	25 35 ,8	1472 ,5			+ 24
15 58 ,6	42 8 ,5	16 33 ,8	1534 ,7			+ 18
16 50 ,4	36 10 ,1	9 25 ,6	1604 ,5			+ 44
17 46 ,5	0 29 33 ,1 *b. i.*	0 1 41 ,6	1671 ,5			+ 61
18 49 ,6	0 49 46 ,1 *b. s.*	0 25 23 ,7	1442 ,4			+ 1
19 49 ,8	42 26 ,6	17 5 ,1	1521 ,5			+ 7
20 48 ,0	35 27 ,4	9 2 ,7	1584 ,7			+ 19
21 40 ,0	0 29 31 ,4	0 4 51 ,6	1659 ,8	760,4	15,25	+ 49
9 Octobre.	*Le soleil.*					
18 13 56 ,0	1 7 11 ,5 *b. i.*	0 44 33 ,6	1357 ,9	765,9	15,4	— 0 ,1
15 46 ,5	0 53 36 ,2	29 24 ,5	1451 ,7			+ 3
16 47 ,0	46 10 ,8	21 6 ,1	1504 ,7			+ 3
17 56 ,5	38 5 ,7	11 33 ,2	1592 ,5			+ 31
19 7 ,0	0 29 46 ,0	0 1 51 ,6	1674 ,4			+ 50
20 12 ,7	0 49 42 ,8 *b. s.*	0 24 56 ,1	1486 ,7			+ 11
21 19 ,3	41 36 ,0	15 45 ,6	1550 ,4			+ 15
22 20 ,0	34 41 ,0	0 7 23 ,6	1637 ,4			+ 51
23 23 ,0	27 27 ,6	—0 1 17 ,8	1725 ,4	765,8	15,25	+ 40
11 Octobre.	*Le soleil.*					
18 7 7 ,2	2 19 31 ,6 *b. i.*	2 2 15 ,9	1035 ,7	778,0	8,25	— 4 ,5
8 23 ,7	9 49 ,9	1 51 55 ,8	1074 ,1			— 8 ,7
9 27 ,7	2 1 50 ,7	43 16 ,3	1114 ,4			— 6 ,2
10 28 ,0	1 54 5 ,8	35 6 ,5	1139 ,3			— 19 ,7
11 41 ,4	45 5 ,3	25 9 ,7	1195 ,6			— 10 ,8
12 45 ,8	37 11 ,3	16 25 ,5	1245 ,8			— 4 ,6

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
11 Octobre.	*Le soleil.*				+	
18h 13′ 44″,7	0°30′ 8″,6 *b. i.*	1° 8′ 25″,4	1303″,2	778,0	8,2	+ 11″,6
14 41,7	23 18,2	1 0 40,5	1357,7			+ 24,3
15 36,2	16 25,8	0 53 15,7	1390,1			+ 11,0
16 45,3	7 51,8	43 51,1	1440,7			+ 2,2
17 41,7	1 1 14,1	36 9,6	1504,5			+ 16,8
18 37,7	0 54 36,9	28 31,1	1565,8			+ 29
19 36,7	47 44,2	20 27,9	1636,3			+ 47
20 49,2	39 12,2	10 58,0	1694,2			+ 34
21 38,2	0 33 2,7 *b. i.*	0 3 51,3	1751,4			+ 38
22 49,7	0 52 37,2 *b. s.*	0 26 12,3	1584,9			+ 34
23 44,0	46 14,3	18 45,9	1648,4			+ 47
25 24,2	34 27,9	0 5 1,4	1766,5			+ 65
26 9,7	29 2,4	—0 1 13,3	1815,7	778,0	7,3	+ 66
	α Piscis austr.					
23 54 57,8	3 2 18,5	2 47 17,7	900,8	777,3	1,0	— 10,8
57 38,8	2 56 59,5	41 44,7	914,8			— 14,8
59 30,3	53 17,5	37 47,6	929,9			— 12,9
0 1 53,3	48 28,1	32 31,3	956,8			— 3,6
7 31,8	36 18,0	19 33,7	1004,3			— 3,9
9 33,3	31 52,9	14 28,9	1044,0			+ 14,8
11 26,0	27 31,1	9 47,3	1063,8			+ 19,9
12 55,3	23 51,1	2 6 0,2	1070,9			+ 31,0
20 23,7	5 15,1	1 45 59,0	1156,1			+ 7,9
21 54,8	2 1 28,1	41 42,9	1185,2			+ 20,0
23 16,3	1 58 0,3	37 50,6	1209,7			+ 26,4
24 48,8	53 47,4	33 22,7	1224,7			+ 18,9
26 26,1	49 18,9	28 36,5	1262,4			+ 11,9
30 24,8	38 27,4	16 35,2	1312,2			+ 19,0
32 20,3	33 1,6	10 36,2	1345,4			+ 18,0
34 27,8	27 14,0	1 3 52,8	1401,2			+ 36,8
36 4,3	22 33,5	0 58 42,3	1431,2			+ 34,9
37 49,3	17 20,4	52 59,4	1461,0			+ 22,9
39 17,8	12 56,4	48 6,4	1490,0			+ 25,1
40 47,3	8 31,7	43 6,2	1525,5			+ 27,6
42 25,0	1 3 46,7	37 34,3	1572,4			+ 37,5
44 5,3	0 58 36,5	31 49,0	1607,5			+ 32
45 47,8	53 10,9	25 51,2	1639,7			+ 17
47 19,3	0 48 38,9	0 20 27,7	1691,2	777,3	0,0	+ 27

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
12 Octobre.	*Le soleil.*				+	
$18^h 12' 48'',5$	$1°46' 46'',7$ *b. i.*	$1\ 27'\ 9'',3$	$1177'',4$	775,3	7,0	$-\ 19'',4$
14 7,8	36 54,8	16 26,0	1228,0			− 23,0
15 47,9	24 59,6	2 52,7	1326,9			+ 4,5
17 0,4	15 52,7	0 53 2,6	1370,1			− 14,0
18 26,5	1 6 7,0	41 20,9	1486,1			+ 34,9
19 23,5	0 59 0,7	33 35,9	1524,8			+ 22
20 23,0	52 38,4	25 30,3	1628,1			+ 78
21 17,5	45 25,2	18 5,0	1620,2			+ 32
22 3,0	40 19,8	11 53,0	1706,8			+ 56
23 3,0	0 32 41,3 *b. i.*	0 3 41,9	1739,4			+ 24
24 32,8	0 50 11,4 *b. s.*	0 23 34,9	1596,5			+ 27
25 44,8	40 45,9	13 44,1	1681,5			+ 44
26 44,0	34 31,9	0 5 38,4	1733,5			+ 33
27 43 0	0 27 59,0	−0 2 26,3	1825,3	775,3	6,75	+ 68
	α Piscis austr.					
22 52 1,7	4 5 29,8	3 53 14,4	735,4	775,1	1,0	+ 1,4
54 57,0	5 10,8	52 56,8	734,0			− 0,7
56 44,0	4 53,8	52 38,2	735,6			+ 0,3
23 0 50,5	3 43,1	51 31,8	731,3			− 6,8
3 13,5	2 52,4	50 38,6	733,8			− 6,2
5 36,5	4 1 46,4	49 34,5	731,9			− 10,7
22 55,0	3 49 14,3	36 25,4	768,9			− 4,3
24 55,0	47 8,4	34 17,9	770,5			− 6,0
26 22,2	45 37,5	32 40,1	777,4			− 3,4
28 1,0	43 45,5	30 45,2	780,3			− 6,0
31 5,5	40 18,4	26 56,4	802,0			+ 6,4
33 19,5	37 29,4	23 58,8	810,6			+ 7,3
34 46,5	35 36,4	21 58,3	818,1			+ 9,9
36 30,5	33 7,4	19 29,2	818,2			+ 3,1
39 37,5	3 28 38,4	3 14 47,2	831,2			+ 3,7
0 2 48,5	2 46 37,9	2 30 26,9	971,0			+ 3,9
4 17,0	43 33,0	27 4,6	988,4			+ 9,9
5 26,3	40 50,0	24 25,4	984,6			− 4,4
7 5,0	37 13,9	20 29,4	1004,5			+ 0,8
9 47,5	30 49,8	13 53,8	1016,0			− 12,5
11 49,5	26 9,6	8 48,1	1041,5			− 5,8
13 34,0	21 51,3	4 20,4	1050,9			− 15,6
14 59,5	18 32,6	2 0 37,4	1075,2	775,1	0,3	− 16,3

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
	α Piscis austr.				+	
0h22′16″,5	2° 0′ 9″,2	1°40′41″,3	1167″,9	775,1	0,3	— 1″,6
24 43,5	1 53 33,1	33 38,1	1195,0			— 9,0
26 7,8	49 55,5	29 30,8	1224,7			+ 0,8
27 41,5	45 46,8	24 51,6	1255,2			+ 8,1
30 46,0	37 22,9	15 29,8	1313,1			+ 17,2
32 20,5	32 57,9	10 35,6	1342,3			+ 18,0
33 31,3	29 37,9	6 56,4	1361,5			+ 16,1
34 53,5	25 53,4	1 2 30,6	1402,8			+ 29,0
37 4,0	19 15,4	0 55 28,0	1427,4			+ 13,4
38 15,2	16 4,4	51 34,0	1470,4			+ 34,3
39 20,5	12 46,9	47 57,3	1489,6			+ 31,3
40 33,5	9 20,9	43 52,7	1528,2			+ 43,9
41 57,3	5 8,5	39 9,0	1559,5			+ 42,5
43 20,3	1 1 14,4	34 24,7	1609,7			+ 62,0
44 49,0	0 56 56,9	29 16,9	1660,0			+ 68
46 7,3	52 58,2	24 42,6	1695,6			+ 81
47 20,0	49 3,3	20 25,3	1718,0			+ 71
48 40,0	45 21,3	15 39,2	1782,1			+103
49 46,0	42 0,4	11 41,1	1819,3			+111
50 52,5	38 59,9	7 39,1	1880,8			+135
52 0,5	35 59,0	0 3 29,6	1949,4			+186
53 9,5	32 52,1	—0 0 45,8	2017,9			+226
54 52,0	28 8,0	7 9,2	2117,2			+280
55 56,0	0 25 14,0	11 10,9	2184,9	774,9	0,5	+319
13 Octobre.	*Le soleil.*					
18 13 40,1	1 50 47,2 *b. i.*	1 31 2,3	1181,9	772,1	7,1	+ 10,7
15 6,6	40 5,1	19 23,2	1241,9			+ 12,2
16 4,8	32 49,1	11 32,2	1276,9			+ 5,3
17 8,6	24 59,7	1 2 55,4	1324,3			+ 5,3
18 6,9	18 0,8	0 55 2,7	1378,1			+ 14,3
18 58,6	11 57,3	48 3,0	1434,3			+ 31,3
20 4,6	1 3 43,6	39 5,3	1478,3			+ 16,9
20 58,1	0 57 26,1	31 50,8	1535,3			+ 27
21 59,1	50 20,3	23 35,2	1605,1			+ 44
22 56,1	43 34,9	15 50,7	1664,2			+ 50
23 46,1	37 37,7	9 3,1	1714,6			+ 51
24 39,6	31 49,4	0 1 36,4	1813,0			+ 99
25 22,6	0 27 29,9 *b. i.*	—0 4 4,9	1914,8			+144

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp de l'air.	Correction de la table II.
	Le soleil.				+	
$18^h 26' 46'',1$	$0°43' 54'',3$ *b. s.*	$+0°16' 41'',9$	$1632'',4$			$+ 14''$
27 38,3	38 14,4	0 9 34,7	1719,7			+ 61
29 1,1	29 8,6	−0 1 44,6	1853,2	772,1	7,0	+116
14 Octobre.	*Le soleil.*					
18 19 34,6	1 16 48,3 *b. i.*	0 54 26,6	1341,7	764,9	8,4	− 5,4
21 12,2	1 4 58,9	41 16,7	1422,2			− 7,8
22 6,0	0 58 29,7	34 0,6	1469,1			− 8
22 58,7	52 32,1	26 53,2	1538,9			+ 8
23 46,2	47 3,1	20 27,7	1595,4			+ 33
24 35,0	41 16,5	13 51,2	1645,3			+ 36
25 22,2	35 38,3	7 27,4	1690,9			+ 31
26 12,2	30 15,6	0 0 40,6	1775,0			+ 73
26 53,0	0 25 13,6 *b. i.*	−0 4 51,5	1805,1			+ 60
27 59,7	0 48 7,7 *b. s.*	+0 18 14,6	1613,1			+ 34
28 58,2	38 20,3	10 17,5	1682,8			+ 49
30 9,5	30 7,7	0 0 27,1	1780,6			+ 78
30 42,7	26 13,8	−0 3 56,0	1809,8	764,9	7,9	+ 73
15 Octobre.	*Le soleil.*					
18 16 6,3	1 53 11,8 *b. i.*	1 33 34,0	1177,8	768,2	5,6	+ 15,0
17 16,8	44 8,9	24 8,6	1200,3			− 11,2
18 9,1	37 49,9	17 8,8	1241,1			− 6,2
19 6,1	30 45,9	9 30,7	1275,2			− 13,6
20 1,8	24 6,9	1 2 2,6	1324,3			− 6,0
20 42,3	19 6,8	0 56 36,5	1350,3			− 13,0
21 31,9	13 10,3	49 56,7	1393,6			− 10,6
22 39,1	1 5 16,9	40 56,7	1460,2			+ 0,1
24 3,8	0 55 12,0	29 31,0	1541,0	768,2	5,0	+ 5
24 59,8	48 35,4	21 57,7	1597,7			+ 9
25 51,8	42 18,4	14 56,7	1641,7			− 1
26 42,0	36 33,9	8 9,9	1704,0			+ 14
27 31,1	30 52,9	0 1 31,7	1761,2			+ 21
28 15,3	0 25 54,1 *b. i.*	−0 4 37,0	1831,1			+ 46
29 26,3	0 44 59,1 *b. s.*	+0 18 6,6	1612,5			− 6
30 24,1	38 17,2	10 16,5	1680,7			+ 6
31 20,3	32 11,2	0 2 39,2	1772,0			+ 44
32 16,8	25 40,0	−0 5 1,1	1841,1	768,2	4,6	+ 54

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
22 Octobre.	*Le soleil.*				+	
$18^h 20' 19'',3$	$2°34' 41'',2$ *b. i.*	$2°17' 53'',4$	$1007'',8$	758,7	0,1	$+ 12'',4$
21 32,5	25 45,0	2 8 39,9	1025,1			— 3,5
22 45,0	17 9,4	1 59 20,0	1069,4			+ 3,7
23 52,5	8 58,0	50 37,8	1100,2			— 2,6
25 3,0	2 0 36,4	41 31,4	1145,2			+ 1,2
26 31,0	1 50 28,2	30 7,9	1220,3			+ 23,6
27 44,0	41 47,7	20 39,9	1267,8			+ 22,6
28 52,6	34 4,2	11 45,2	1339,0			+ 48,2
29 57,8	26 23,5	1 3 39,9	1363,6			+ 24,5
31 13,0	17 15,7	0 53 27,9	1427,8			+ 26,7
33 10,0	1 3 41,0	38 0,6	1540,4			+ 40,0
34 0,0	0 58 9,8	31 37,9	1591,9			+ 48
36 11,5	43 4,8	14 26,6	1718,2			+ 50
37 49,0	0 32 30,3 *b. i.*	0 1 37,3	1853,0			+ 89
39 27,5	0 48 52,3 *b. s.*	0 20 52,3	1680,0			+ 61
40 23,5	42 30,9	13 24,6	1746,3			+ 73
41 16,5	36 13,5	0 6 24,2	1789,3		—	+ 60
42 24,5	29 31,2	—0 2 35,9	1927,7	758,7	0,3	+136
	α Piscis austr.				—	
23 22 34,1	3 49 32,7	3 36 45,3	767,4	758,7	2,6	— 1,5
24 32,1	47 37,7	34 42,8	771,9			— 1,7
26 5,3	45 53,0	32 59,0	774,0			— 4,1
27 35,6	44 9,6	31 13,8	775,8			— 7,0
33 45,1	36 43,9	23 22,2	801,7			— 1,0
35 43,6	34 10,3	20 35,4	814,9			+ 5,3
37 14,1	32 0,4	18 26,8	813,6			— 2,2
38 28,1	30 1,4	16 35,6	805,8			— 15,6
39 55,1	38 0,4	14 18,1	822,3			— 4,7
41 25,1	25 41,9	11 56,8	825,1			— 8,5
44 58,1	20 9,6	5 59,1	850,5			+ 0,8
46 36,6	17 29,6	3 11,7	857,9			— 0,1
48 5,1	14 49,6	3 0 32,9	856,7			— 11,7
49 44,0	11 59,1	2 57 27,0	872,1			— 3,0
51 16,6	9 14,1	54 32,1	882,0			— 2,1
52 37,6	6 44,4	51 58,7	885,7			— 6,6
54 1,1	4 8,7	49 10,1	898,6			— 2,3
55 18,1	3 1 47,6	46 34,7	912,9			+ 4,1
56 34,1	2 59 12,2	43 58,3	913,9			— 3,8

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée,	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
	α Piscis austr.				—	
23h 58′ 22″,1	2°55′ 46″,1	2°40′ 13″,2	932″,9			+ 3″,0
59 51,1	52 47,8	36 59,4	948,4			+ 7,8
0 1 13,1	49 47,4	33 59,1	948,3			— 3,1
3 15,1	45 39,1	29 24,9	974,2	757,6	3,25	+ 7,2
23 Octobre.	*α Piscis austr.*					
22 41 39,1	4 4 9,2	3 52 4,9	724,3	755,9	1,0	+ 1,7
43 40,6	4 42,9	52 33,0	729,9			+ 7,5
45 9,6	4 58,4	52 58,8	719,6			— 2,1
22 46 52,6	4 5 7,5	53 3,9	723,6			+ 2,1
0 4 50,1	2 41 48,0	2 25 46,2	961,8		0,85	— 2,7
6 29,6	38 8,8	21 52,2	976,6			— 1,6
8 10,6	24 24,8	17 49,6	995,2			+ 2,6
9 41,1	31 3,1	14 7,8	1015,3			+ 9,6
13 19,6	22 24,0	4 55,8	1048,2			+ 7,2
14 43,1	18 56,5	2 1 8,7	1067,8			+ 11,8
15 56,5	15 52,5	1 58 4,9	1067,6			— 1,6
17 4,6	13 9,0	55 2,8	1086,2			+ 4,7
18 35,1	9 16,3	50 57,3	1099,0			— 0,6
19 52,1	6 6,5	47 26,1	1121,8			+ 6,0
21 32,1	1 43,5	42 45,4	1138,1			+ 2,3
22 48,6	1 58 35,5	39 8,0	1167,5			+ 16,2
24 34,1	53 49,0	34 3,8	1185,2		0,4	+ 8,9
25 49,6	50 30,0	30 22,5	1207,5			+ 16,5
26 50,1	47 44,5	27 23,4	1224,1			+ 12,4
28 20,6	43 28,0	22 52,1	1235,9			+ 3,3
29 48,1	39 33,7	18 26,1	1267,6			+ 12,2
31 23,6	35 7,5	13 31,5	1296,0			+ 14,3
32 52,1	30 50,0	8 56,0	1314,0			+ 6,1
34 26,1	26 27,5	1 3 56,5	1351,0			+ 14,7
35 46,3	22 28,9	0 59 38,8	1370,1		0,75	+ 8,2
37 17,6	18 2,3	54 41,7	1400,6			+ 7,4
38 49,6	13 44,8	49 38,3	1446,5			+ 24,5
40 9,4	9 35,2	45 12,2	1463,0			+ 10,7
41 30,1	5 36,0	40 39,6	1496,4			+ 14,2
42 52,6	1 1 50,8	35 58,0	1552,8			+ 41,6
44 9,1	0 57 45,4	31 34,0	1571,4			+ 28
45 32,6	53 31,3	26 42,8	1608,5			+ 33
46 42,1	49 58,9	22 37,9	1641,0			+ 35

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
23 Octobre.	*α Piscis austr.*				—	
$0^h 48'\ 5'',1$	$0°45'57'',4$	$0°17'42'',6$	$1694'',8$			$+\ 56''$
49 26 ,6	42 1 ,6	12 49 ,5	1752 ,1			+ 79
50 47 ,6	37 44 ,8	7 55 ,2	1789 ,6			+ 78
52 13 ,6	33 2 ,1	0 2 39 ,5	1822 ,6			+ 72
53 34 ,6	29 5 ,5	—0 2 21 ,0	1886 ,5	755,8	0,5	+ 95
18 Novembre	*Le soleil.*					
19 7 41 ,3	2 30 46 ,1 *b. i.*	2 13 26 ,4	1039 ,5	754,8	9,0	— 8″,3
9 8 ,3	22 5 ,2	4 8 ,1	1077 ,1			— 9 ,6
10 25 ,5	14 36 ,2	1 55 49 ,8	1126 ,4			+ 4 ,3
11 42 ,3	2 6 59 ,7	47 33 ,1	1166 ,6			+ 5 ,5
13 3 ,5	1 59 0 ,2	38 45 ,4	1211 ,2			+ 12 ,2
14 12 ,0	52 3 ,2	31 18 ,9	1250 ,5			+ 3 ,6
15 7 ,8	46 48 ,2	25 13 ,7	1294 ,5			+ 0 ,2
16 24 ,5	39 5 ,2	16 50 ,3	1334 ,9			+ 15 ,2
17 37 ,0	31 27 ,2	8 52 ,5	1354 ,7			— 17 ,9
18 51 ,0	24 9 ,0	1 0 43 ,6	1405 ,4			— 15 ,6
19 58 ,3	17 25 ,1	0 53 17 ,3	1447 ,8			— 22 ,5
21 17 ,5	9 39 ,6	44 30 ,2	1509 ,4			— 21 ,6
22 28 ,8	1 2 33 ,1	36 34 ,0	1559 ,1			— 31 ,4
23 49 ,8	0 54 58 ,7	27 31 ,2	1647 ,5			— 9
24 54 ,0	48 55 ,2	20 19 ,5	1715 ,7			+ 4
25 50 ,5	43 29 ,7	13 58 ,6	1771 ,1			+ 7
26 49 ,3	37 41 ,7	7 21 ,0	1820 ,7			— 1
27 40 ,8	32 58 ,2	0 1 32 ,1	1886 ,1			+ 15
28 49 ,3	0 27 2 ,2 *b. i.*	—0 6 13 ,6	1995 ,8			+ 67
29 41 ,3	0 49 21 ,7 *b. s.*	0 20 19 ,0	1742 ,7			+ 34
30 39 0	43 24 ,2	13 45 ,0	1779 ,2			+ 15
31 32 ,3	38 14 ,7	7 40 ,4	1834 ,3			+ 18
32 23 ,0	33 49 ,2	0 1 52 ,7	1916 ,6			+ 54
33 41 ,8	26 32 ,1	—0 7 9 ,2	1921 ,3	755,4	9,5	+ 78
	α Piscis austr.					
23 38 48 ,3	3 30 17 ,6	3 15 57 ,6	860 ,0	757,9	11,4	+ 14 ,9
40 32 ,8	27 38 ,3	13 14 ,8	863 ,2			+ 10 ,2
41 55 ,8	25 39 ,9	11 1 ,5	878 ,4			+ 19 ,5
43 24 ,8	23 22 ,5	8 34 ,6	887 ,9			+ 24 ,4
47 47 ,8	15 48 ,0	3 0 56 ,9	891 ,1			+ 2 ,6

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
	α Piscis austr.				—	
23h 50′ 5″,8	3° 11′ 46″,4	2° 56′ 42″,4	904″,0	757,9	11,4	+ 1″,5
52 13,8	7 52,4	52 37,6	914,8			— 0,8
54 18,8	3 3 53,1	48 30,1	923,0			— 6,4
56 31,8	2 59 30,3	43 59,0	931,3			— 13,9
0 9 57,8	30 48,6	13 22,2	1046,4			— 12,0
11 49,3	26 44,4	8 42,4	1082,0			+ 5,5
13 30,8	22 44,3	2 4 22,5	1101,8			+ 7,3
15 25,8	17 53,6	1 59 21,8	1111,8			— 5,1
19 3,8	8 58,0	49 34,1	1163,9			+ 3,4
20 35,8	5 2,2	45 18,9	1183,3			+ 1,9
22 11,8	2 0 48,6	40 48,5	1200,1			— 3,3
23 57,1	1 56 15,7	35 46,5	1229,2			+ 1,1
34 11,3	28 19,3	1 4 40,0	1419,3			+ 15,5
35 39,3	23 55,8	0 59 59,6	1436,2			+ 0,4
37 22,3	18 42,4	54 22,0	1460,4			— 13,8
38 39,3	15 1,9	50 7,6	1494,3			— 7,8
40 0,3	11 2,7	45 37,7	1525,0			— 8,4
41 31,8	6 40,6	40 32,9	1567,7			— 2,3
42 53,8	1 2 13,5	35 48,9	1584,6			— 23,2
44 15,3	0 58 30,6	31 9,5	1641,1			+ 4
45 29,3	54 38,6	26 54,7	1663,9			— 12
47 5,3	50 35,6	21 48,4	1727,2			+ 14
48 36,3	45 30,6	15 45,8	1784,8			+ 23
49 53,8	42 8,6	11 6,0	1862,6			+ 67
51 6,8	38 19,5	6 40,0	1899,5			+ 64
52 13,1	34 30,0	0 2 36,2	1913,8			+ 35
53 28,3	30 47,0	—0 2 2,7	1969,7			+ 58
54 54,3	27 14,5	7 24,7	2079,2			+125
56 8,3	23 13,5	12 4,2	2117,7			+118
57 18,3	19 19,0	—0 16 31,5	2150,5	757,9	11,25	+104
24 Novembre	*α Piscis austr.*					
23 7 5,3	4 1 43,2	3 48 43,4	779,8	756,6	11,25	+ 14,8
9 23,8	0 22,2	47 24,3	777,9			+ 9,4
11 10,3	3 59 21,7	46 17,0	774,7			+ 3,6
13 0,3	58 2,3	45 1,0	781,3			+ 6,7
17 56,3	53 56,0	41 4,6	771,4			— 8,1
20 20,3	51 55,4	38 52,8	782,6			— 7,2
22 28,3	49 51,3	36 46,5	784,8		11,75	— 10,4

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
24 Novembre	*α Piscis austr.*				—	
23h 25′ 13″,8	3° 47′ 8″,7	3° 33′ 51″,0	797″,7	756,6	11,75	— 0″,7
56 17,8	3 0 9,2	2 44 27,6	941,7			— 9,3
58 8,8	2 56 23,8	40 34,0	949,8			— 15,1
59 34,8	53 23,4	37 29,2	954,2			— 21,9
0 1 17,8	49 56,5	33 47,2	969,3			— 19,9
3 2,3	46 8,2	29 48,4	979,8			— 25,1
7 11,8	37 30,5	20 6,0	1044,5			+ 5,4
8 51,8	33 43,7	16 3,6	1060,1			+ 4,9
10 38,3	29 40,8	11 48,4	1072,4			— 0,6
12 26,8	25 19,5	7 5,8	1093,7			+ 1,2
14 1,8	21 34,8	2 3 0,9	1113,9			+ 3,7
16 18,8	15 57,4	1 57 0,7	1136,7			+ 0,3
18 24,3	10 45,9	51 23,1	1162,8			+ 0,8
20 6,8	6 30,5	46 38,6	1191,9			+ 7,4
21 31,6	2 58,1	42 41,0	1217,1		12,6	+ 14,2
22 49,3	1 59 32,5	39 0,2	1232,3			+ 10,7
24 47,3	54 20,5	33 19,5	1261,0			+ 10,0
26 21,3	50 9,0	28 42,9	1286,1			+ 10,4
29 57,0	40 19,2	17 52,9	1346,3			+ 7,2
31 18,8	36 39,8	13 40,4	1379,4			+ 7,2
32 42,3	32 28,3	9 19,1	1389,2			+ 0,3
34 19,8	28 17,6	4 10,5	1447,1			+ 29,3
35 37,0	24 52,7	1 0 2,7	1490,0			+ 47,2
37 29,3	19 12,8	0 53 57,1	1515,7			+ 30,1
39 11,3	13 54,2	48 20,0	1534,2			+ 7,2
40 41,3	1 9 48,3	43 18,4	1589,9	756,7	12,0	+ 30,5
21 Février. 1868.	*Le soleil.*					
2 55 53,5	2 14 57,8 *b. i.*	1 54 41,4	1216,4			+ 6,5
57 36,0	3 0,3	41 26,2	1294,1			+ 16,6
58 45,7	1 54 44,4	32 24,8	1339,1			+ 13,4
3 1 42,5	34 22,0	9 26,2	1495,8			+ 30,2
2 43,0	27 37,2	1 1 54,2	1543,0			+ 24,7
3 36,3	21 23,2	0 54 35,9	1607,3			+ 40,5
4 35,0	14 48,9	46 55,8	1673,1			+ 47,9
5 37,5	1 7 47,8	38 45,1	1742,7	770,0	19,6	+ 52,7
6 49,0	0 59 52,8	29 22,9	1830,0			+ 68
7 56,5	52 26,8	20 31,2	1915,6			+ 75
8 57,0	45 21,4	0 12 34,3	1967,1			+ 49

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
21 Février.	*Le soleil.*				—	
$3^h 10' 56'',5$	$0°33' 27'',8$ *b. i.*	$-0° 3' 10'',0$	$2197'',8$	770,0	19,6	+136
12 30 ,5	0 49 38 ,8 *b. s.*	+0 16 49 ,6	1969 ,2			+ 99
13 35 ,0	41 53 ,8	8 18 ,0	2015 ,8			+ 60
14 32 ,3	36 34 ,0	+0 0 42 ,9	2151 ,1			+131
15 17 ,0	31 48 ,0	−0 5 12 ,5	2220 ,5			+119
	α Ceti.					
8 43 34 ,4	4 48 26 ,9	4 36 26 ,9	720 ,9			− 6'',8
45 29 ,9	32 45 ,5	4 20 12 ,8	752 ,7			− 9 ,6
47 56 ,9	4 12 42 ,8	3 59 33 ,1	789 ,7			− 20 ,1
49 54 ,4	3 57 11 ,4	42 57 ,3	854 ,1			+ 2 ,2
52 46 ,4	34 7 ,4	18 52 ,0	915 ,4			− 5 ,3
54 6 ,9	23 28 ,4	3 7 33 ,4	955 ,0			− 2 ,4
55 14 ,9	14 27 ,4	2 58 0 ,2	987 ,2			− 2 ,3
56 40 ,4	3 3 8 ,0	45 59 ,7	1028 ,3	776,2	25,7	− 4 ,7
59 14 ,4	2 42 21 ,0	24 22 ,3	1078 ,8			+ 16 ,8
9 0 43 ,9	31 10 ,0	11 48 ,6	1162 ,4			− 14 ,0
1 55 ,4	21 43 ,0	2 1 46 ,5	1231 ,7			− 29 ,2
3 43 ,4	2 8 1 ,8	1 46 37 ,5	1284 ,3			− 17 ,3
5 13 ,4	1 56 54 ,8	34 0 ,3	1374 ,5			+ 3 ,7
6 45 ,0	45 22 ,4	21 9 ,9	1452 ,5			+ 3 ,3
8 22 ,4	33 27 ,4	1 7 31 ,1	1558 ,3			+ 18 ,6
11 34 ,4	1 10 23 ,8	0 40 37 ,9	1785 ,9	776,0	25,5	+ 40 ,0
	β Orimis.					
10 0 21 ,1	2 42 55 ,8	2 24 32 ,4	1103 ,4			− 26 ,3
2 8 ,9	29 40 ,4	2 10 0 ,8	1179 ,6			− 14 ,6
3 26 ,5	20 14 ,6	1 59 30 ,6	1244 ,0			+ 0 ,2
4 35 ,9	11 41 ,4	50 29 ,3	1272 ,1			− 20 ,4
5 46 ,4	2 3 33 ,4	41 2 ,8	1350 ,6	776,0	27,5	+ 8 ,8
9 1 ,4	1 40 6 ,6	1 14 52 ,3	1514 ,3			+ 9 ,8
12 0 ,1	19 21 ,0	0 50 48 ,1	1712 ,9			+ 30 ,9
13 33 ,9	8 23 ,0	38 8 ,1	1814 ,9			+ 28 ,3
14 51 ,9	1 0 4 ,0	0 27 35 ,3	1948 ,8			+ 72 ,3
12 Mars.	*Le soleil.*					
4 40 54 ,2	4 28 53 ,3 *b. i.*	4 17 6 ,0	707 ,3	771,6	10,75	− 9 ,9
42 30 ,5	16 21 ,8	4 3 54 ,8	747 ,0			+ 1 ,9

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
12 Mars.	*Le soleil.*				—	
4h 43′ 32″,7	4° 8′ 24″,1 *b. i.*	3°55′ 23″,5	780″,6	771,6	10,75	+ 17″,2
44 38,2	3 59 33,0	46 23,4	789,6			+ 4,0
46 8,0	47 48,6	34 4,9	823,7			+ 7,2
47 28,7	37 16,3	22 59,5	856,8			+ 10,5
48 34,0	28 31,7	14 0,6	871,1			— 0,1
49 48,0	3 18 55,5	3 3 49,5	906,0			+ 4,0
51 3,7	3 29 40,8 *b. s.*	3 25 38,4	842,4			+ 3,6
52 30,7	28 9,9	13 38,6	871,3			— 2,0
54 0,2	3 16 22,6	3 1 17,4	905,2			— 5,8
58 45,5	2 9 9,4 *b. i.*	1 49 35,9	1173,5			+ 6,5
5 0 14,2	1 58 1,3	37 18,9	1242,4			— 8,1
1 19,2	49 49,0	28 18,2	1290,8			— 9,7
2 23,2	41 55,9	19 25,8	1350,1			— 6,4
3 23,7	1 34 29,4	1 11 2,2	1407,2			+ 8,2
4 39,5	1 53 49,9 *b. s.*	1 32 58,6	1251,3			— 24,9
6 12,2	14 0,3 *b. i.*	0 47 38,2	1582,1			+ 30,5
7 22,7	1 5 34,3	37 50,2	1664,1			+ 39,0
8 51,2	0 55 2,7	25 31,6	1771,1			+ 53
10 10,7	46 12,9	14 27,8	1905,1			+ 96
11 14,2	38 55,9	+0 5 37,3	1998,6			+118
12 25,7	30 58,9	—0 4 20,1	2119,0			+153
13 19,7	0 24 41,8	11 52,1	2194,0	771,6	11,6	+151
14 44,7	0 41 23,6 *b. s.*	0 8 31,7	1971,9			+117
15 53,7	34 20,1	—0 1 5,7	2125,8			+194
16 48,5	27 25,1	8 44,5	2169,6			+161
18 7,2	0 18 58,9	—0 19 43,4	2222,3			+110
15 Mars.	*Le soleil.*					
5 24 46,3	1 9 0,4 *b. i.*	0 43 8,7	1551,7	774,5	6,0	+ 6,1
25 54,6	1 0 4,4	33 36,9	1587,5			— 32,2
26 47,8	0 54 1,6	26 11,4	1670,2			— 3,0
27 44,3	47 20,0	18 18,4	1741,6			+ 9
29 31,3	34 57,3	0 3 21,7	1895,6			+ 42
30 15,5	29 11,7	—0 2 48,7	1920,4			+ 6
31 15,0	22 14,2	11 7,4	2001,6			+ 13
32 14,3	0 15 41,2	—0 19 24,5	2105,7			+ 41
33 29,8	0 33 17,8 *b. s.*	+0 2 15,5	1862,3			— 8
34 17,0	28 3,8	—0 4 20,8	1944,6	774,5	6,0	+ 17

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
	α Ceti.				—	
$8^h 52' 10'',0$	$3°37' 42'',3$	$3°23' 56'',1$	$826'',2$	775,5	9,8	$-18'',9$
53 40,2	25 39,0	11 15,6	863,4			− 15,7
54 51,9	16 8,8	3 1 11,2	897,6			− 11,7
56 16,0	3 5 12,9	2 49 22,4	950,5			+ 3,7
57 42,7	2 53 18,5	37 11,8	966,7			− 24,0
58 59,2	43 20,4	26 27,4	1013,0			− 20,1
9 0 21,0	32 51,4	2 14 58,5	1072,9			− 1,9
2 54,0	13 20,0	1 53 30,2	1189,8			+ 23,9
4 12,2	2 2 57,0	42 32,2	1224,8			+ 4,6
5 13,0	1 54 58,0	34 0,7	1257,3			− 8,5
6 39,2	44 0,9	21 55,6	1325,3			− 7,7
7 51,0	35 9,2	11 51,9	1397,3			+ 6,3
8 57,0	26 32,6	1 2 37,1	1435,5			− 16,0
10 30,2	14 57,1	0 49 34,0	1523,1			− 15,4
11 54,7	1 4 31,1	0 37 44,5	1606,6	775,5	10,5	− 21,5
17 Mars.	*Le soleil.*					
5 9 44,4	4 40 1,4 *b. i.*	4 28 38,4	683,0	772,8	1,2	+ 15,1
10 59,2	29 55,2	18 17,7	697,5			+ 9,4
12 0,1	21 44,4	4 9 53,0	711,4			+ 6,0
13 11,4	4 12 10,8	3 59 59,8	731,4			+ 5,4
15 17,4	3 55 7,6	42 21,9	765,7			+ 1,3
16 46,9	43 11,0	30 7,0	784,0			− 10,6
17 52,2	34 37,4	21 3,2	714,2			− 3,8
19 10,7	3 24 14,1	3 10 9,2	844,9			− 2,9
22 3,4	3 32 19,7 *b. s.*	3 18 20,6	839,1			+ 14,9
23 21,4	22 13,8	3 7 29,3	884,5			+ 30,6
24 17,2	14 36,5	2 59 43,3	893,0			+ 15,6
25 20,9	3 6 9,0	50 51,1	917,9			+ 13,1
26 24,9	2 58 2,6	41 56,2	966,4			+ 34,0
27 23,6	49 59,6	33 45,5	974,1			+ 12,8
28 16,9	2 43 44,6	2 26 19,6	1045,0			+ 49,9
29 38,6	2 2 11,8 *b. i.*	1 42 43,4	1168,4			− 0,6
30 39,9	1 54 27,7	34 11,2	1216,5			+ 6,3
31 49,4	45 41,7	24 29,5	1235,2			− 34,2
32 50,4	37 50,2	15 58,7	1311,5			+ 14,9
33 54,9	29 49,7	1 6 58,2	1371,5			+ 14,3
35 5,4	20 51,3	0 57 7,5	1423,8			− 0,1
36 19,1	11 30,9	46 49,7	1481,2			− 5,6

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
17 Mars.	*Le soleil.*				—	
5h37′23″,9	1° 4′32″,4 *b. i.*	0°37′46″,2	1606″,2	772,8	1,2	+ 65″,0
38 11,9	0 58 49,9	31 3,9	1666,9			+ 79
39 12,4	51 42,1	22 36,5	1745,5			+ 99
40 9,4	44 46,2	14 38,3	1808,3			+100
41 11,1	38 53,5	0 6 0,8	1972,8			+211
43 33,9	22 12,3	—0 13 57,6	2169,6			+238
44 38,4	15 5,0	22 58,9	2283,9			+277
45 20,9	9 51,0	28 55,9	2326,9			+261
45 51,4	0 7 34,0	—0 33 11,9	2445,9			+355
46 28,9	0 27 28,0 *b. s.*	—0 6 14,9	2022,9			+144
47 35,4	20 55,3	15 33,2	2188,5			+249
48 27,4	15 4,3	22 49,9	2274,2			+266
49 13,9	9 47,8	29 20,4	2348,2			+283
50 0,4	0 6 4,3	—0 35 50,7	2515,0	772,5	2,3	+405
	α Ceti.					
8 50 41,1	3 49 24,2	3 36 25,1	779,1	772,5	6,1	— 15,5
52 34,4	34 13,7	20 29,9	823,8			— 12,2
54 12,7	21 0,5	3 6 41,2	859,3			— 18,8
55 49,9	3 7 55,0	2 53 1,9	893,1			— 24,1
59 51,5	2 36 15,5	19 6,4	1029,1			— 7,0
9 1 35,9	22 48,4	2 4 27,3	1101,0			+ 7,1
3 25,4	2 8 38,6	1 49 5,7	1172,9			+ 11,3
4 37,4	1 58 49,6	38 59,7	1249,9			+ 37,0
6 2,1	48 15,6	27 7,4	1268,2			— 4,1
8 7,9	32 40,2	1 9 29,3	1390,9			+ 20,7
9 33,9	22 20,9	0 57 26,6	1494,3			+ 52,8
10 46,6	12 41,6	47 15,9	1525,7			+ 13,1
12 9,4	1 2 48,6	0 35 20,5	1648,1			+ 54,1
13 23,9	0 53 46,1	0 25 15,3	1710,8			+ 39
15 28,6	0 40 8,8	0 7 48,6	1940,2	772,5	6,3	+141
	α Canis maj.					
10 17 17,7	4 38 31,0	4 26 59,4	675,0	772,0	6,75	— 9,6
18 34,4	30 20,5	18 32,2	708,3			+ 7,0
20 8,4	20 22,0	4 8 8,0	734,0			+ 11,4
21 28,9	11 42,0	3 59 10,9	751,1			+ 9,2
23 8,1	4 0 59,0	48 6,8	772,2			+ 4,9

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
	α Canis maj.				—	
10h 27′ 6″,7	3°35′ 7″,9	3°21′ 16″,1	831″,8	772,0		— 3″,6
28 44,6	24 30,0	3 10 10,2	859,8			— 6,7
30 39,4	3 12 12,3	2 57 5,8	906,5			+ 1,2
35 9,2	2 42 59,8	26 6,1	1013,7		7,0	+ 3,0
36 32,9	34 3,5	16 24,5	1059,0			+ 11,3
38 15,2	23 7,9	4 34,3	1113,6			+ 17,1
39 29,1	15 4,5	1 55 54,2	1150,3			+ 15,5
40 53,6	2 6 4,9	46 1,4	1203,5			+ 23,8
42 18,9	1 56 38,6	36 0,4	1238,2			+ 7,1
43 42,4	47 44,6	26 10,1	1294,5			+ 13,5
45 2,4	39 15,0	16 43,0	1352,0			+ 18,6
46 12,4	32 5,0	8 25,2	1419,8			+ 39,7
47 19,4	25 11,0	1 0 27,8	1483,2			+ 67,0
48 28,1	17 28,0	0 52 17,2	1510,8			+ 25,9
49 35,7	10 28,0	44 12,0	1576,0			+ 50,1
50 46,9	1 2 42,0	35 40,7	1621,3			+ 18,0
52 5,9	0 54 20,8	26 12,6	1688,2			+ 13
53 28,2	47 3,0	16 16,7	1846,3			+104
54 37,4	40 9,0	7 55,2	1933,8			+126
55 40,9	33 44,0	0 0 13,8	2010,2			+137
56 37,9	0 30 41,0	—0 6 41,1	2242,1	772,0	7,0	+336
18 Mars.	*Le soleil.*					
5 12 2,8	5 9 50,0 *b. i.*	4 59 29,5	620,5	769,9	5,2	— 2,0
13 17,1	4 59 51,2	49 12,9	638,3			— 0,9
14 16,8	52 10,0	40 57,2	672,8			+ 20,0
15 17,4	43 56,2	32 33,7	682,5			+ 4,4
17 17,8	27 6,9	15 52,7	674,2			— 27,2
18 38,1	16 38,7	4 4 44,5	714,2			— 9,5
19 39,1	8 22,6	3 56 16,6	726,0			— 16,3
20 33,6	4 1 3,6	48 42,6	741,0			— 18,9
21 44,1	3 51 48,2	38 54,0	774,2			— 8,5
24 35,4	29 11,8	15 6,1	845,7			+ 1,6
25 37,9	20 50,1	3 6 24,5	865,6			— 3,5
26 31,8	13 47,5	2 58 54,4	893,1			+ 2,1
27 28,6	3 6 34,2	50 59,8	934,4			+ 19,9
28 29,1	2 58 26,0	42 34,2	851,8			+ 8,8
29 34,6	49 55,6	33 26,0	989,0			+ 15,0
30 31,6	42 23,6	25 30,0	1013,6			+ 10,4

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
18 Mars.	*Le soleil.*				—	
5h31′52″,6	2°31′57″,2 *b. i.*	2°14′12″,5	1064″,7	769,9	5,2	+ 18″,9
32 43,6	25 35,2	2 7 5,5	1109,7			+ 36,5
33 37,3	18 22,6	1 59 35,8	1126,8			+ 21,2
34 38,1	10 35,8	51 6,6	1169,2			+ 26,5
35 35,6	2 3 22,8	43 5,1	1217,7			+ 39,2
36 51,8	1 53 39,0	32 16,0	1282,4			+ 51,6
37 50,6	46 17,9	24 13,8	1324,1			+ 51,4
38 52,1	38 24,8	15 28,3	1376,5			+ 54,5
39 58,1	30 6,1	1 6 25,1	1421,0			+ 45,7
40 52,3	24 0,8	0 58 50,6	1510,2			+ 93,6
42 10,6	14 0,0	47 53,8	1566,2			+ 74,3
43 4,1	7 21,5	40 25,0	1616,5			+ 74,8
44 0,8	1 0 17,8	32 29,5	1668,3			+ 68,6
44 52,3	0 53 49,1	25 17,1	1712,0			+ 57
45 50,6	47 14,2	17 7,9	1806,3			+ 92
46 46,1	40 31,6	9 21,9	1869,7			+ 92
47 45,1	33 46,2	0 1 6,7	1959,5			+116
48 37,6	28 27,2	—0 6 4,1	2071,3			+172
49 29,6	23 35,8	13 30,5	2206,3			+278
50 29,1	15 48,3	21 50,1	2258,4			+219
51 13,8	10 10,3	28 5,5	2295,8			+194
51 56,6	0 6 6,4	—0 34 4,8	2411,2			+262
52 58,1	0 25 47,7 *b. s.*	—0 10 30,1	2177,8			+221
54 0,6	17 49,5	19 15,0	2204,5			+210
54 45,6	12 34,9	25 32,9	2287,8			+215
55 41,1	0 5 35,2	—0 33 19,1	2334,3	769,9	5,25	+178
	α Ceti.					
9 5 22,8	1 53 36,1	1 32 37,9	1258,2			+ 16,9
6 27,6	45 32,1	23 33,0	1319,1			+ 29,1
7 43,6	35 57,1	12 53,9	1383,2			+ 33,2
9 1,6	26 27,1	1 1 58,4	1468,7	769,4	7,0	+ 54,9
11 20,1	1 10 2,0	0 42 34,9	1647,1			+110,8
19 Avril.	*Le soleil.*					
35 37,2	3 14 46,3 *b. i.*	3 0 13,6	872,7	767,5	1,6	+ 2,5
36 59,8	3 4 25,8	2 49 4,9	920,9			+ 16,9
38 3,5	2 56 11,8	40 29,6	942,2			+ 10,1

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
19 Avril.	*Le soleil.*				—	
8h39′19″,3	2°46′27″,0 *b. i.*	2°30′18″,1	968″,9	767,5	1,6	+ 1″,2
42 41,3	20 55,7	2 3 11,9	1063,8			— 7,8
43 49,6	12 26,2	1 54 3,8	1102,4			— 7,3
45 6,8	2 2 43,7	43 44,3	1139,4			— 17,9
46 8,8	1 55 21,5	35 27,7	1193,8			— 2,1
48 41,0	36 46,4	15 11,5	1294,9			— 8,1
49 54,3	27 54,8	1 5 27,2	1347,6			— 12,3
50 53,3	21 2,0	0 57 37,3	1404,7			— 1,6
51 57,8	13 27,8	49 4,3	1463,5			+ 4,0
53 13,3	1 4 19,5	39 4,7	1514,8			— 15,1
54 14,3	0 57 11,9	31 1,0	1570,9			— 16
55 26,8	48 33,9	21 26,7	1627,2			— 33
56 25,3	42 36,0	14 19,3	1696,7			— 16
57 38,3	34 3,5	0 4 13,5	1790,0			— 3
58 34,8	27 21,0	—0 3 18,0	1839,0			— 19
59 34,3	21 10,9	11 6,8	1937,7			+ 17
9 0 27,8	15 25,5	18 7,6	2013,1			+ 21
1 16,8	0 10 31,5	—0 24 32,8	2104,3			+ 60
2 15,3	0 30 41,3 *b. s.*	—0 0 18,5	1859,8			+ 34
3 19,3	23 4,7	8 43,1	1907,8			+ 6
4 24,0	0 15 46,5	—0 17 6,7	1973,2	767,5	2,0	— 5
	α Orionis.					
12 26 25,8	1 10 47,7	0 45 14,0	1533,7			+ 35,6
27 48,8	1 0 40,6	33 41,6	1619,0			+ 40,1
29 12,8	0 50 57,8	22 18,3	1719,5			+ 59
30 32,3	41 35,2	10 24,5	1870,7	767,3	4,0	+125
31 44,3	33 25,8	0 1 32,8	1913,0			+ 89
32 59,6	24 41,8	—0 8 45,2	2007,0			+ 97
34 10,5	0 17 1,8	—0 18 26,5	2128,3			+140
	α Canis min.					
13 22 15,8	6 9 46,6	6 0 58,6	528,1	767,4	4,7	— 3,5
24 26,8	5 51 51,1	5 42 34,7	556,4			+ 1,4
25 44,8	41 11,1	31 36,6	574,5			+ 4,6
27 10,5	29 29,8	19 38,1	591,7			+ 3,1
28 46,3	16 17,3	5 6 7,0	610,3			+ 2,7
30 30,3	5 2 2,3	4 51 30,9	631,4			+ 0,1

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
	α Canis min.				—	
13h32′ 33″,0	4°45′ 17″,6	4°34′ 17″,4	660″,2	767,4	4,7	— 1″,4
36 27,0	4 13 34,7	4 1 27,8	726,9			— 0,2
38 25,5	3 57 33,6	3 44 50,8	762,8			— 1,0
40 8,6	43 48,5	30 24,9	803,6			+ 4,5
41 32,3	32 25,6	18 41,2	824,4			— 5,9
43 6,6	19 56,4	3 5 29,2	867,2			0,0
44 37,8	3 7 48,8	2 52 43,8	905,0			— 0,3
45 58,8	2 57 15,2	41 24,1	951,1			+ 10,2
47 33,5	44 42,9	28 10,0	992,9			+ 4,2
48 50,3	34 32,9	17 26,2	1026,7			— 2,5
50 35,8	20 46,7	2 2 42,5	1084,2			— 4,4
51 49,3	11 29°,6	1 52 27,2	1042,4			+ 10,6
52 59,8	2 2 14,3	42 37,5	1176,8	767,4	4,75	— 1,4
54 14,3	1 52 49,7	32 14,6	1235,1			+ 6,0
55 39,3	42 0,7	20 26,0	1294,7			+ 2,8
56 57,6	32 1,3	1 9 30,5	1350,8			— 2,6
58 23,3	21 22,7	0 57 35,5	1427,2			0,0
59 34,8	12 21,9	47 39,1	1482,8			— 10,4
14 1 0,8	1 2 8,7	35 42,7	1586,0			+ 11,3
2 17,8	0 52 53,5	25 1,6	1671,9			+ 18
3 30,8	44 31,9	14 54,1	1777,8			+ 39
4 50,3	35 10,9	0 3 52,2	1878,7			+ 61
5 53,3	27 18,9	—0 4 50,2	1929,1			+ 31
7 9,3	20 56,9	15 21,0	2177,9			+213
8 37,8	0 11 4,9	—0 27 35,0	2319,9	767,4	4,7	+246
23 Avril.	*α Orionis.*				+	
12 16 26,7	2 24 45,9	2 7 52,5	1013,4	760,0	2,5	— 8,5
18 1,2	2 12 40,4	1 54 47,9	1072,5			— 1,8
19 49,9	1 58 47,2	39 47,7	1140,5			+ 0,8
21 17,2	47 42,5	27 43,6	1198,9			+ 1,9
22 31,7	38 16,4	17 27,2	1249,2			— 0,2
23 35,7	30 21,4	1 8 38,0	1303,4			+ 6,8
24 52,7	20 46,6	0 58 1,9	1364,7			+ 13,3
26 2,7	12 10,1	48 24,1	1426,0			+ 9,9
27 17,7	1 2 55,8	38 5,8	1490,0			+ 6,1
28 20,7	0 55 19,4	29 26,8	1552,6			+ 12
29 29,7	46 45,4	19 58,8	1606,6			— 3
30 38,5	38 30,3	10 33,0	1677,3			— 3
31 50,2	0 30 30,5	0 0 44,0	1786,5	760,0	2,0	+ 36

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
	α Canis min.				+	
13h24′ 5″,2	5°54′26″,9	5°45′35″,3	531″,6	759,9	1,3	— 1″,4
25 27,7	43 5,5	34 0,0	545,5			— 2,5
26 47,2	32 9,7	22 50,0	559,7			— 3,7
28 13,7	20 25,9	10 41,0	584,9			+ 3,7
29 26,2	5 10 24,9	5 0 30,2	594,7			— 1,6
33 56,2	4 33 37,4	4 22 36,2	661,2			+ 1,1
37 3,7	4 8 12,5	3 56 18,4	714,1			+ 1,7
38 22,5	3 57 26,6	45 15,7	730,9			— 5,9
37 56,7	44 47,1	32 3,7	763,4			— 3,8
41 31,7	31 56,1	18 45,5	790,6			— 10,5
43 6,2	19 24,3	3 5 31,9	832,4			— 4,2
44 31,2	3 8 5,6	2 53 38,3	867,3			— 3,9
46 1,7	2 56 10,5	40 59,0	911,5			+ 1,5
48 25,4	37 12,5	20 54,3	978,2			— 0,4
49 56,2	25 18,1	2 8 13,5	1024,6			— 1,6
51 6,2	16 4,4	1 58 27,3	1057,1			— 8,6
52 33,7	2 4 54,7	46 15,0	1119,7			+ 2,9
53 48,7	1 55 13,8	35 47,9	1165,9			+ 0,3
55 22,2	43 9,5	22 46,4	1223,1			— 8,6
56 41,7	32 56,1	1 11 42,6	1273,5			— 16,6
58 11,2	21 26,5	0 59 15,6	1330,9			— 32,5
59 31,0	11 36,2	48 10,2	1406,0			— 24,6
14 0 43,5	1 2 25,8	38 6,0	1459,8			— 39,4
1 54,2	0 54 3,3	28 17,3	1546,1			— 17
3 4,7	45 16,6	18 30,6	1606,0			— 28
4 9,2	37 31,6	0 9 34,2	1677,4			— 25
5 26,7	0 28 52,6	—0 1 9,9	1802,5	759,9	1,25	+ 21
10 Août 1872.	*Le soleil.*					
16 30 35,5	3 26 19,2	3 14 10,6	728,6	759,2	25,5	— 6,4
32 37,0	3 11 7,3	2 58 26,5	760,8			— 13,3
34 3,7	3 30 54,8 *b. s.*	3 18 52,7	722,1			— 1,7
35 17,5	21 45,5	3 9 22,3	743,2			— 3,2
37 16,3	3 7 8,0	2 54 15,8	782,2			— 2,7
41 22,0	2 7 12,2 *b. i.*	1 51 0,1	972,1			— 10,2
42 59,5	1 55 41,5	38 34,8	1026,7			— 5,0
44 7,0	1 47 43,9	1 30 0,1	1063,8			+ 1,2
45 34,0	2 6 56,6 *b. s.*	1 50 36,6	980,0			— 2,9
46 47,0	1 58 16,9	41 22,1	1014,8		25,4	— 4,0

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
10 Août.	*Le soleil.*			"	+	
16h48'15",5	1°48' 2",3	1°30'11",7	1070",6	759,2	25,4	+ 7",0
51 41,0	0 55 17,1 *b. i.*	0 32 43,1	1354,0			+ 5
53 3,5	45 56,4	22 23,6	1412,8			+ 10
54 33,5	36 1,5	11 9,4	1492,1			+ 23
55 42,0	28 39,0	0 2 37,9	1561,1			+ 42
56 47,5	0 21 28,7	—0 5 31,0	1619,7			+ 48
58 25,0	0 38 35,2 *b. s.*	+0 14 2,7	1472,5			+ 20
59 36,5	30 33,0	+0 5 12,3	1520,7			+ 13
17 0 56,2	0 21 54,9	—0 4 38,1	1593,0	759,2	24,75	+ 24
11 Août.	*Le soleil.*					
16 18 42,8	5 11 21,5 *b. i.*	5 2 28,1	533,4	758,9	26,75	— 4,6
20 17,8	4 59 12,8	4 49 53,0	559,8			+ 4,8
21 35,5	4 49 6,1	4 39 36,6	569,5			— 0,6
22 56,2	5 9 38,6 *b. s.*	5 0 36,0	542,6			+ 3,1
24 16,7	4 59 11,3	4 49 59,5	551,8			— 3,2
25 17,2	4 51 32,3	4 42 1,8	570,5			+ 4,1
28 19,7	3 57 30,1 *b. i.*	3 46 25,9	664,2			+ 1,8
29 55,2	45 38,8	33 56,2	702,6			+ 15,3
31 21,9	3 34 40,8	3 22 36,9	723,9			+ 12,3
32 37,0	3 55 43,4 *b. s.*	3 44 38,8	674,6			— 1,4
33 55,2	45 42,2	34 18,4	683,8			— 4,5
35 5,2	3 37 2,6	3 25 13,0	709,6			+ 3,3
41 15,3	2 21 6,1 *b. i.*	2 5 47,0	919,1			— 5,3
42 45,7	2 10 18,7	1 54 10,6	968,1			+ 2,6
44 19,4	1 59 4,7	42 10,6	1014,1			+ 3,7
45 44,7	48 45,9	31 16,6	1049,3			— 5,7
46 53,2	40 41,0	22 32,8	1088,3			— 2,5
47 56,1	33 16,1	14 32,5	1123,6			— 2,9
49 3,8	25 11,5	1 5 56,4	1155,1		26,1	— 12,6
50 15,4	17 0,6	0 56 51,9	1208,7			— 2,6
51 57,2	1 5 28,6	43 59,4	1289,2			+ 12,3
53 8,2	0 57 12,6	35 2,1	1330,5			+ 4
54 27,2	48 35,6	25 5,4	1410,2			+ 30
55 42,2	39 48,3	15 40,1	1448,2			+ 11
56 48,5	32 33,3	7 21,8	1511,5			+ 22
57 41,0	26 46,8	0 0 47,6	1559,2			+ 33
58 41,5	20 19,3	—0 6 45,9	1627,2			+ 55
17 0 9,2	11 3,3	17 41,3	1724,6			+ 87

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
11 Août.	*Le soleil.*				+	
17h 1′ 7″,7	0° 5′ 15″,3 *b. i.*	—0°24′57″,6	1812″,9			+132″
2 7,5	0 25 30,3 *b. s.*	—0 0 44,4	1574,3			+ 39
3 1,7	19 57,3	7 26,8	1644,1			+ 70
3 53,2	14 20,3	13 48,7	1689,0			+ 74
4 46,6	9 2,3	20 24,4	1766,7			+115
5 45,7	0 3 54,3	—0 27 41,1	1895,4	758,9	25,5	+208
12 Août.	*Le soleil.*					
16 15 48,0	5 48 52,4 *b. i.*	5 40 49,9	482,5	757,0	28,0	— 2,7
17 25,9	36 8,4	27 46,0	502,4			+ 0,8
18 26,7	5 27 56,2	5 19 38,2	498,0			— 13,0
19 20,2	5 52 15,0 *b. s.*	5 44 9,5	485,7			+ 4,4
20 26,0	43 34,2	35 23,7	490,5			— 1,1
21 26,5	5 35 42,1	5 27 21,0	501,1			— 0,1
23 54,3	4 45 30,3 *b. i.*	4 36 4,8	565,5			— 5,9
25 12,5	35 24,8	25 47,5	577,3			— 10,2
26 26,5	4 25 49,3	15 56,6	592,7			— 11,5
34 40,6	3 23 26,2	3 11 6,2	740,0			+ 7,3
36 5,5	12 24,2	2 59 56,6	747,6			— 12,9
37 18,5	3 3 21,8	50 29,9	771,9			— 12,6
38 32,4	2 54 20,7	2 40 49,3	811,4			+ 0,8
40 2,5	3 13 30,3 *b. s.*	3 0 46,6	763,7			+ 6,2
41 29,8	3 2 29,0	2 49 28,2	780,8			— 5,8
42 55,5	2 51 59,4	2 38 20,6	818,8			+ 2,8
47 27,5	1 49 4,2	1 31 44,9	1039,3		28,0	— 2,3
48 53,5	38 54,7	20 44,2	1090,5			+ 2,5
50 5,0	30 22,2	11 36,0	1126,2			— 2,9
51 8,0	22 59,0	1 3 34,0	1165,0			— 1,3
52 12,4	15 22,3	0 55 22,7	1199,6			— 6,8
53 52,3	1 3 49,7	42 40,6	1269,1			— 2,3
54 47,8	0 57 53,7	35 38,5	1335,2			+ 27
56 0,5	49 34,0	26 26,6	1387,7			+ 31
57 0,5	42 21,2	18 52,1	1409,1			+ 7
58 1,4	35 45,7	11 11,5	1474,2			+ 18
58 53,0	30 8,5	+0 4 41,9	1526,6			+ 42
59 50,2	23 42,0	—0 2 27,8	1569,8			+ 40
17 0 44,7	17 54,0	9 21,3	1635,3			+ 65
1 46,0	11 41,1	16 59,9	1720,9			+106
2 38,5	0 6 43,6	—0 23 33,1	1817,1			+165

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
12 Août.	*Le soleil.*				+	
17h 3′ 50″,5	0°25′ 38″,5 *b. s.*	—0° 0′ 13″,1	1553″,6			+ 32″
4 48,2	19 7,5	8 4,1	1631,6			+ 70
5 40,0	13 42,5	14 30,3	1692,8			+ 93
6 30,5	8 54,5	20 45,9	1780,4			+145
7 14,0	0 5 34,5	—0 26 9,3	1903,8	757,0	26,5	+244
13 Août.	*Le soleil.*					
16 23 37,3	5 2 4,8 *b. i.*	4 53 2,0	542,8	755,6	28,8	— 1,3
24 50,9	4 52 33,8	43 13,8	560,0			+ 2,0
25 48,4	4 45 1,3	4 35 34,7	566,6			— 3,0
27 6,8	5 5 46,9 *b. s.*	4 56 49,2	537,7			— 2,1
28 16,7	4 56 51,8	47 33,0	558,8			+ 7,2
29 31,4	4 47 8,0	4 37 39,0	569,0			+ 2,6
31 24,0	4 1 50,7 *b. i.*	3 51 6,6	644,1			— 1,9
33 20,6	3 46 55,2	35 43,8	671,4			— 5,0
34 38,4	3 37 7,0	3 25 29,7	697,3			— 0,8
35 56,8	3 57 40,2 *b. s.*	3 46 51,3	648,9			— 5,9
36 51,3	3 50 51,4	3 39 41,3	670,1			+ 1,2
37 50,0	3 43 18,9	3 32 0,8	678,1			— 5,8
47 6,8	2 4 24,4 *b. i.*	1 47 55,9	988,5			+ 10,4
48 47,7	1 52 8,6	34 54,9	1033,7		27,8	+ 6,0
49 56,8	1 43 39,2	1 26 1,2	1058,0			— 7,1
51 4,8	2 5 15,6 *b. s.*	1 48 56,5	979,1			+ 4,3
52 14,1	1 56 49,9	40 3,0	1006,9			— 3,0
53 41,3	1 46 20,0	1 28 53,5	1046,5			— 6,6
55 13,8	1 6 22,4 *b. i.*	0 45 25,0	1257,4			+ 3,5
56 21,5	0 58 24,2	36 47,3	1296,9			— 2
57 20,6	51 51,8	29 16,3	1355,5			+ 16
58 27,6	44 21,8	20 45,9	1415,9			+ 28
59 40,3	35 54,1	11 33,2	1460,9			+ 16
17 0 34,0	29 51,8	0 4 45,3	1506,5			+ 25
1 45,8	22 6,2	—0 4 18,4	1584,6			+ 54
2 39,3	16 23,2	11 2,8	1646,0			+ 72
5 13,1	0 26 48,1	+0 1 17,2	1530,9			+ 34
6 4,6	21 19,1	—0 5 10,3	1589,4			+ 53
6 53,3	15 54,1	11 15,6	1629,7	755,6	27,25	+ 60

Temps sidér. de l'observation.	Hauteur app. observée.	Hauteur vraie calculée.	Réfrac. observée.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Correction de la table II.
17 Août.	*Le soleil.*				+	
$16^h 28' 41'',3$	$5° 18' 39'',0$ *b. i.*	$5° 9' 53'',4$	$525'',6$	755,0	29,25	+ $5'',0$
30 6,4	5 7 20,5	4 58 23,4	537,1			+ 1,7
31 34,8	4 55 38,5	4 46 27,7	550,8			— 1,6
32 48,4	5 17 5,0 *b. s.*	5 8 13,9	531,1			+ 8,6
33 42,0	9 53,0	5 1 1,0	532,0			0,0
34 35,3	5 2 55,5	4 53 50,9	544,6			+ 2,9
36 39,6	4 15 35,0 *b. i.*	4 5 28,3	606,7			— 11,3
38 21,8	4 2 28,8	3 51 46,8	642,0			+ 0,1
40 4,8	3 49 12,8	3 38 0,2	672,6			+ 3,0
41 34,5	4 8 13,3 *b. s.*	3 57 43,8	629,5			— 2,2
42 43,8	3 59 16,0	48 28,7	647,3			— 1,9
43 41,6	3 51 51,5	3 40 47,0	664,5			+ 0,4
50 13,2	2 31 39,6 *b. i.*	2 17 12,3	867,3	755,0	28,4	— 7,7
51 31,8	2 22 2,9	2 6 50,6	912,3			+ 3,8
52 53,8	2 41 44,6 *b. s.*	2 27 44,1	840,5			+ 1,4
54 16,1	2 31 33,8	2 16 55,1	876,3			+ 0,9
56 20,2	1 46 35,6 *b. i.*	1 28 58,6	1057,0			+ 8,2
57 36,4	37 20,1	19 0,3	1099,8			+ 9,4
58 40,3	29 35,8	10 40,3	1135,5			+ 7,2
59 51,3	20 54,9	1 1 24,3	1170,6			— 0,3
17 1 11,3	11 27,7	0 50 59,8	1227,9			+ 6,9
2 27,8	1 2 41,7	0 41 3,6	1298,1		28,1	+ 25,8
3 28,2	0 55 42,2	33 13,8	1348,4			36
4 27,9	48 52,2	25 30,0	1402,2			51
5 27,2	41 53,8	17 50,1	1443,7			47
6 43,8	0 33 13,1 *b. i.*	7 57,0	1516,1			63
7 46,8	0 54 16,5 *b. s.*	0 31 31,3	1365,2			44
8 49,8	46 55,5	23 15,3	1402,2			38
9 48,1	40 37,1	15 56,3	1480,8			76
10 43,8	0 34 5,1	0 8 48,6	1516,5	755,0	27,8	+ 68

Série 2.

Temps de l'observation.	Distance zénithale.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Réfraction observée.	Réfraction calculée.	Diff.	Décl. moyenne de l'étoile.
			ζ Sagittarii.				
1866. 9 Juillet.	85°40'50",6	756,8	+23°,8C	624",5	626",1	— 1",6	—30° 4' 4",9
13 Août.	40 47 ,9	753,2	+18 ,5	630 ,0	636 ,1	— 6 ,1	
17 Août.	40 44 ,0	755,2	+20 ,0	632 ,3	633 ,9	— 1 ,6	
			α Piscis austr.				
1865. 6 Déc.	85 53 50 ,6	762,4	—24 ,9	812 ,3	817 ,1	— 4 ,8	N A.
1866. 16 Août.	55 27 ,2	754,0	+15 ,0	686 ,2	675 ,2	+ 11 ,0	N A.
7 Sept.	55 23 ,4	761,8	10 ,8	692 ,2	693 ,9	— 1 ,7	
18	55 23 ,5	759,8	12 ,5	693 ,2	687 ,0	+ 6 ,2	
19	55 34 ,0	759,1	16 ,3	682 ,8	676 ,4	+ 6 ,4	
25	55 19 ,0	763,5	9 ,8	698 ,7	698 ,2	+ 0 ,5	
27 Sept.	55 6 ,4	761,0	6 ,5	711 ,6	705 ,0	+ 6 ,6	
9 Oct.	55 2 ,6	755,5	+ 0 ,6	717 ,1	716 ,4	+ 0 ,7	
20 Oct.	54 31 ,0	770,7	— 8 ,1	750 ,4	759 ,8	— 9 ,4	
11 Nov.	55 9 ,8	746,5	— 1 ,9	714 ,4	716 ,9	— 2 ,5	
12	54 47 ,4	757,1	— 6 ,0	737 ,0	739 ,7	— 2 ,7	
13 Nov.	54 25 ,4	759,8	— 8 ,6	759 ,1	750 ,4	+ 8 ,7	
11 Déc.	54 49 ,3	751,8	—10 ,4	737 ,3	749 ,3	— 12 ,0	
1867. 17 Août.	55 19 ,7	756,9	+14 ,3	677 ,2	679 ,1	— 1 ,9	
29 Août.	55 7 ,1	755,0	10 ,3	690 ,6	688 ,2	+ 2 ,4	
2 Sept.	55 16 ,6	753,6	11 ,8	681 ,5	683 ,0	— 1 ,5	
8 Oct.	55 16 ,0	760,9	11 ,4	686 ,9	690 ,8	+ 3 ,9	
9 Oct.	55 5 ,7	767,1	11 ,3	697 ,3	696 ,5	+ 0 ,8	
			γ² Sagittarii.				
1866. 28 June.	86 1 9 ,8	751,4	+12 ,7	686 ,0	691 ,1	— 5 ,1	—30°25'20",9
29 June.	1 2 ,8	752,9	13 ,2	693 ,0	690 ,7	+ 2 ,3	
2 Juillet.	1 9 ,4	752,9	12 ,9	686 ,5	691 ,9	— 5 ,4	
9	1 29 ,8	756,7	24 ,4	666 ,5	663 ,8	+ 2 ,7	
25	1 28 ,8	740,7	17 ,9	667 ,2	667 ,5	— 0 ,3	
30	1 19 ,6	745,1	15 ,5	677 ,8	677 ,7	+ 0 ,1	
31 Juillet.	1 29 ,1	748,5	18 ,1	668 ,4	674 ,6	— 6 ,2	
7 Août.	1 25 ,4	751,7	18 ,6	672 ,3	675 ,5	— 3 ,2	
12	1 35 ,5	752,5	22 ,0	662 ,5	667 ,5	— 5 ,0	
13	1 28 ,7	753,2	19 ,5	669 ,3	674 ,6	— 5 ,3	

Temps de l'observation.	Distance zénithale.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Réfraction observée.	Réfraction calculée.	Diff.	Décl. moyenne de l'étoile.
			γ^2 *Sagittarii.*				
1866. 17 Août.	86° 1'32",1	755,2	+20°,3C	666",1	674",2	— 8",1	—30°25'20",9
24	1 18 ,1	749,2	15 ,3	680 ,3	681 ,9	— 1 ,6	
7 Sept.	1 11 ,5	761,5	17 ,2	687 ,3	687 ,7	— 0 ,4	
8	1 19 ,2	759,6	18 ,8	679 ,5	681 ,8	— 2 ,3	
			52 *Eridani.*				
1866. 16 Févr.	86 23 6 ,8	767,2	—25 ,0	898 ,1	898 ,5	— 0 ,5	—30 50 19 ,0
17	23 6 ,5	772,7	—24 ,8	898 ,4	904 ,1	— 5 ,7	
18	22 48 ,8	779,5	—24 ,3	916 ,2	909 ,8	+ 6 ,4	
24 Févr.	23 19 ,9	770,7	—22 ,1	885 ,5	890 ,7	— 5 ,2	
1867. 8 Févr.	23 44 ,3	766,9	—16 ,9	853 ,4	865 ,8	— 12 ,4	—30 50 11 ,3
9 Févr.	23 33 ,0	768,0	—18 ,7	864 ,8	874 ,2	— 9 ,8	
			χ *Canis majoris.*				
1867. 31 Janv.	87 47 36 ,3	752,1	—36 ,3	1293 ,2	1307 ,7	— 14 ,5	—32 21 25 ,5
1 Févr.	46 45 ,8	760,1	—38 ,6	1343 ,8	1333 ,3	+ 10 ,5	
8 Févr.	49 4 ,9	766,8	—17 ,8	1205 ,4	1213 ,8	— 8 ,4	
			1150 *B.A.C.*				
1867. 8 Janv.	87 49 0 ,1	769,1	—21 ,9	1237 ,2	1245 ,1	— 6 ,9	—32 21 54 ,9
1 Févr.	47 8 ,3	759,5	—36 ,5	1352 ,0	1319 ,5	+ 32 ,5	
			879 *B.A.C.*				
1867. 25 Janv.	88 20 34 ,2	765,7	—29 ,1	1513 ,3	1504 ,0	+ 9 ,3	—32 58 3 ,6
2 Févr.	20 54 ,2	767,7	—28 ,3	1493 ,5	1497 ,8	— 4 ,3	
			527 *B.A.C.*				
1867. 8 Janv.	88 23 22 ,2	771,6	—21 ,1	1449 ,9	1463 ,8	— 13 ,9	—32 59 51 ,5
			β *Piscis austr.*				
1866. 13 Nov.	88 26 19 ,5	759,8	— 8 ,2	1368 ,8	1356 ,5	+ 13 ,3	—33 1 57 ,3
11 Déc.	26 22 ,0	751,8	— 9 ,6	1367 ,8	1352 ,5	+ 15 ,3	
1867. 17 Août.	28 30 ,4	756,8	+14 ,1	1210 ,7	1206 ,1	+ 4 ,6	—33 1 39 ,0
2 Sept.	28 30 ,6	753,8	+12 ,1	1212 ,1	1213 ,9	— 1 ,8	
3	28 35 ,6	751,0	+14 ,0	1207 ,5	1197 ,6	+ 9 ,9	
20 Sept.	27 15 ,9	753,2	+ 3 ,1	1289 ,2	1266 ,4	+ 22 ,8	

Temps de l'observation.	Distance zénithale.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Réfraction observée.	Réfraction calculée.	Diff.	Décl. moyenne de l'étoile.
		4015 *B.A.C.*					
1866. 4 Avril.	88°34'35",3	766,3	— 0°,7C	1372",6	1364",4	+ 8",2	—33° 9'47",0
1867. 6 Avril	35 29 ,1	739,9	— 1 ,7	1336 ,9	1327 ,4	+ 9 ,5	—33 10 7 ,0
22 Avril.	35 16 ,9	749,3	+ 1 ,8	1351 ,5	1317 ,5	+ 34 ,0	
		γ Sculptoris.					
1866. 11 Nov.	88 40 9 ,0	746,5	— 2 ,0	1364 ,0	1374 ,0	— 9 ,9	—33 15 42 ,1
12	38 58 ,1	757,2	— 6 ,8	1435 ,9	1426 ,9	+ 8 ,2	
13 Nov.	38 29 ,7	759,8	— 8 ,8	1463 ,7	1445 ,7	+ 17 ,8	
1867. 20 Sept.	39 38 ,0	753,1	+ 3 ,0	1369 ,7	1349 ,7	+ 19 ,8	—33 15 22 ,6
		ζ Canis majoris.					
1867. 25 Janv.	88 41 2 ,8	762,5	—31 ,0	1737 ,8	1683 ,1	+ 54 ,7	—33 22 17 ,2
1 Févr.	40 34 ,1	759,8	—38 ,0	1766 ,9	1751 ,5	+ 15 ,4	
16 Févr.	44 30 ,4	755,7	—13 ,3	1534 ,0	1523 ,8	+ 10 ,2	
		γ Piscis austr.					
1866. 2 Nov.	88 56 21 ,8	757,1	— 3 ,6	1560 ,5	1528 ,9	+ 31 ,6	—33 35 11 ,2
13 Nov.	55 46 ,4	759,7	— 8 ,4	1596 ,0	1541 ,0	+ 55 ,0	
11 Déc.	55 46 ,6	751,7	—10 ,2	1597 ,8	1577 ,7	+ 20 ,1	
1867. 17 Août.	58 7 ,7	756,9	+14 ,3	1426 ,1	1383 ,3	+ 42 ,8	—33 34 52 ,3
2 Sept.	58 17 ,2	753,7	+12 ,0	1418 ,3	1396 ,6	+ 21 ,7	
20 Sept.	56 49 ,3	753,2	+ 3 ,0	1508 ,6	1462 ,9	+ 45 ,7	
		ι Piscis austr.					
1866. 13 Nov.	88 58 36 ,7	759,7	— 8 ,0	1601 ,4	1599 ,8	+ 1 ,6	—33 38 6 ,6
1867. 2 Sept.	89 1 26 ,6	753,9	+12 ,4	1409 ,3	1414 ,9	— 5 ,6	—33 37 50 ,4
3	1 14 ,9	751,1	+14 ,3	1421 ,1	1388 ,8	+ 32 ,3	
4	1 32 ,4	755,3	+16 ,3	1403 ,8	1386 ,4	+ 17 ,4	
20 Sept.	88 59 43 ,6	753,6	+ 3 ,6	1514 ,6	1479 ,4	+ 35 ,2	
		λ Columbae.					
1867. 8 Janv.	89 6 5 ,0	770,0	—22 ,6	1887 ,3	1862 ,2	+ 25 ,1	—33 49 52 ,8
8 Févr.	7 35 ,3	766,8	—17 ,5	1804 ,0	1804 ,8	— 0 ,8	
9 Févr.	7 1 ,2	768,2	—19 ,1	1838 ,3	1822 ,4	+ 15 ,9	

Temps de l'observation.	Distance zénithale.	Baromètre.	Temp. de l'air.	Réfraction observée.	Réfraction calculée.	Diff.	Décl. moyenne de l'étoile.
			υ^4 *Eridani.*				
1866. 17 Févr.	89°20′ 1″,9	772,7	—24°,4C	2121″,6	2057″,7	+ 63″,9	—34° 7′37″,4
18 Févr.	19 30 ,2	779,5	—24 ,1	2153 ,3	2066 ,2	+ 87 ,1	
1867. 8 Janv.	20 48 ,4	769,8	—22 ,0	2062 ,3	2019 ,1	+ 43 ,2	—34 7 28 ,3
8 Févr.	20 19 ,9	766,9	—16 ,8	2095 ,4	1939 ,8	+155 ,6	
			ε *Scorpii.*				
1866. 19 June.	89 21 36 ,9	754,6	+15 ,5	1715 ,4	1530 ,5	+184 ,9	—34 2 50 ,3
			α *Columbae.*				
1866. 16 Févr.	89 20 1 ,2	767,2	—25 ,8	2195 ,1	2062 ,7	+132 ,4	N. A.
17	20 51 ,2	773,0	—26 ,1	2145 ,4	2095 ,8	+ 49 ,6	
24 Févr.	20 58 ,3	770,0	—23 ,0	2138 ,8	2040 ,7	+ 98 ,1	
1867. 8 Janv.	21 37 ,3	770,0	—22 ,5	2089 ,6	2055 ,1	+ 34 ,5	N. A.
25	17 31 ,7	762,5	—30 ,8	2339 ,2	2094 ,1	+245 ,1	
31 Janv.	20 27 ,7	752,1	—36 ,1	2164 ,5	2187 ,4	— 22 ,9	
8 Févr.	22 9 ,3	766,8	—17 ,5	2064 ,3	1981 ,4	+ 82 ,9	
9	22 38 ,6	768,2	—19 ,1	2035 ,1	1997 ,4	+ 37 ,7	
16	24 18 ,1	755,7	—12 ,3	1936 ,5	1871 ,2	+ 65 ,3	
1868. 21 Févr.	20 38 ,2	776,5	—22 ,5	2154 ,2	2047 ,5	+106 ,7	N. A.

TABLES DES RÉFRACTIONS,

donnant les réfractions relatives à la température t exprimée en degrés centigrades, et à la hauteur du baromètre de $76+\zeta$ centimètres; le baromètre étant réduit à la température zéro.

Distance zénithale.	Réfraction correspondant à la température t et à la hauteur du baromètre $= 76 + \xi$ centimètres.
0° 0′	$0'',00 - t(0'',000 - 0'',0000\,t) + \xi(0'',000 - 0'',00000\,t)$
20	$0,35 - t(0,001 - 0,0000\,t) + \xi(0,004 - 0,00001\,t)$
40	$0,70 - t(0,002 - 0,0001\,t) + \xi(0,009 - 0,00003\,t)$
1 0	$1,05 - t(0,004 - 0,0001\,t) + \xi(0,014 - 0,00005\,t)$
20	$1,40 - t(0,005 - 0,0002\,t) + \xi(0,018 - 0,00006\,t)$
40	$1,75 - t(0,006 - 0,0002\,t) + \xi(0,023 - 0,00008\,t)$
2 0	$2,11 - t(0,008 - 0,0003\,t) + \xi(0,028 - 0,00010\,t)$
20	$2,46 - t(0,009 - 0,0003\,t) + \xi(0,032 - 0,00011\,t)$
40	$2,81 - t(0,010 - 0,0004\,t) + \xi(0,037 - 0,00013\,t)$
3 0	$3,16 - t(0,012 - 0,0004\,t) + \xi(0,042 - 0,00015\,t)$
20	$3,51 - t(0,013 - 0,0005\,t) + \xi(0,046 - 0,00017\,t)$
40	$3,86 - t(0,014 - 0,0005\,t) + \xi(0,051 - 0,00018\,t)$
4 0	$4,22 - t(0,016 - 0,0006\,t) + \xi(0,056 - 0,00020\,t)$
20	$4,57 - t(0,017 - 0,0006\,t) + \xi(0,060 - 0,00021\,t)$
40	$4,92 - t(0,018 - 0,0007\,t) + \xi(0,065 - 0,00023\,t)$
5 0	$5,28 - t(0,019 - 0,0007\,t) + \xi(0,070 - 0,00025\,t)$
20	$5,63 - t(0,021 - 0,0008\,t) + \xi(0,074 - 0,00026\,t)$
40	$5,99 - t(0,022 - 0,0008\,t) + \xi(0,079 - 0,00028\,t)$
6 0	$6,35 - t(0,023 - 0,0009\,t) + \xi(0,084 - 0,00030\,t)$
20	$6,70 - t(0,024 - 0,0009\,t) + \xi(0,088 - 0,00031\,t)$
40	$7,06 - t(0,025 - 0,0010\,t) + \xi(0,093 - 0,00033\,t)$
7 0	$7,42 - t(0,027 - 0,0010\,t) + \xi(0,098 - 0,00035\,t)$
20	$7,77 - t(0,028 - 0,0010\,t) + \xi(0,102 - 0,00037\,t)$
40	$8,13 - t(0,029 - 0,0011\,t) + \xi(0,107 - 0,00039\,t)$
8 0	$8,49 - t(0,031 - 0,0011\,t) + \xi(0,112 - 0,00041\,t)$
20	$8,85 - t(0,032 - 0,0012\,t) + \xi(0,116 - 0,00043\,t)$
40	$9,21 - t(0,033 - 0,0012\,t) + \xi(0,121 - 0,00044\,t)$
9 0	$9,57 - t(0,035 - 0,0013\,t) + \xi(0,126 - 0,00046\,t)$
20	$9,93 - t(0,036 - 0,0013\,t) + \xi(0,130 - 0,00047\,t)$
40	$10,29 - t(0,037 - 0,0014\,t) + \xi(0,135 - 0,00049\,t)$
10 0	$10,65 - t(0,039 - 0,0014\,t) + \xi(0,140 - 0,00051\,t)$
20	$11,01 - t(0,040 - 0,0015\,t) + \xi(0,145 - 0,00052\,t)$
40	$11,37 - t(0,041 - 0,0015\,t) + \xi(0,150 - 0,00054\,t)$
11 0	$11,74 - t(0,043 - 0,0016\,t) + \xi(0,155 - 0,00056\,t)$
20	$12,10 - t(0,044 - 0,0016\,t) + \xi(0,159 - 0,00058\,t)$
40	$12,46 - t(0,045 - 0,0017\,t) + \xi(0,164 - 0,00060\,t)$
12 0	$12,83 - t(0,047 - 0,0017\,t) + \xi(0,169 - 0,00062\,t)$
20	$13,20 - t(0,048 - 0,0018\,t) + \xi(0,174 - 0,00063\,t)$
40	$13,57 - t(0,050 - 0,0018\,t) + \xi(0,179 - 0,00065\,t)$
13 0	$13,94 - t(0,051 - 0,0019\,t) + \xi(0,184 - 0,00067\,t)$
20	$14,31 - t(0,052 - 0,0019\,t) + \xi(0,188 - 0,00068\,t)$
40	$14,68 - t(0,053 - 0,0020\,t) + \xi(0,193 - 0,00070\,t)$
14 0	$15,05 - t(0,055 - 0,0020\,t) + \xi(0,198 - 0,00072\,t)$
20	$15,42 - t(0,056 - 0,0021\,t) + \xi(0,203 - 0,00073\,t)$
40	$15,80 - t(0,057 - 0,0021\,t) + \xi(0,208 - 0,00075\,t)$
15 0	$16,18 - t(0,059 - 0,0022\,t) + \xi(0,213 - 0,00077\,t)$

Distance zénithale.	Réfraction correspondant à la température t et à la hauteur du baromètre $= 76 + \xi$ centimètres.
15° 0′	$16'',18 - t\,(0'',059 - 0'',00022\,t) + \xi\,(0'',213 - 0'',00077\,t)$
20	$16\,,55 - t\,(0\,,060 - 0\,,00022\,t) + \xi\,(0\,,218 - 0\,,00079\,t)$
40	$16\,,93 - t\,(0\,,062 - 0\,,00022\,t) + \xi\,(0\,,223 - 0\,,00081\,t)$
16 0	$17\,,31 - t\,(0\,,063 - 0\,,00023\,t) + \xi\,(0\,,228 - 0\,,00083\,t)$
20	$17\,,69 - t\,(0\,,065 - 0\,,00023\,t) + \xi\,(0\,,233 - 0\,,00084\,t)$
40	$18\,,07 - t\,(0\,,066 - 0\,,00024\,t) + \xi\,(0\,,238 - 0\,,00086\,t)$
17 0	$18\,,46 - t\,(0\,,068 - 0\,,00025\,t) + \xi\,(0\,,243 - 0\,,00088\,t)$
20	$18\,,84 - t\,(0\,,069 - 0\,,00025\,t) + \xi\,(0\,,248 - 0\,,00090\,t)$
40	$19\,,23 - t\,(0\,,070 - 0\,,00026\,t) + \xi\,(0\,,253 - 0\,,00092\,t)$
18 0	$19\,,62 - t\,(0\,,072 - 0\,,00026\,t) + \xi\,(0\,,258 - 0\,,00094\,t)$
20	$20\,,01 - t\,(0\,,073 - 0\,,00027\,t) + \xi\,(0\,,263 - 0\,,00095\,t)$
40	$20\,,40 - t\,(0\,,074 - 0\,,00027\,t) + \xi\,(0\,,268 - 0\,,00097\,t)$
19 0	$20\,,79 - t\,(0\,,076 - 0\,,00028\,t) + \xi\,(0\,,273 - 0\,,00099\,t)$
20	$21\,,18 - t\,(0\,,077 - 0\,,00029\,t) + \xi\,(0\,,278 - 0\,,00101\,t)$
40	$21\,,58 - t\,(0\,,079 - 0\,,00029\,t) + \xi\,(0\,,283 - 0\,,00103\,t)$
20 0	$21\,,98 - t\,(0\,,081 - 0\,,00030\,t) + \xi\,(0\,,289 - 0\,,00105\,t)$
20	$22\,,38 - t\,(0\,,082 - 0\,,00030\,t) + \xi\,(0\,,294 - 0\,,00107\,t)$
40	$22\,,78 - t\,(0\,,083 - 0\,,00031\,t) + \xi\,(0\,,299 - 0\,,00109\,t)$
21 0	$23\,,18 - t\,(0\,,085 - 0\,,00031\,t) + \xi\,(0\,,305 - 0\,,00111\,t)$
20	$23\,,58 - t\,(0\,,086 - 0\,,00032\,t) + \xi\,(0\,,310 - 0\,,00113\,t)$
40	$23\,,98 - t\,(0\,,088 - 0\,,00032\,t) + \xi\,(0\,,315 - 0\,,00115\,t)$
22 0	$24\,,39 - t\,(0\,,090 - 0\,,00033\,t) + \xi\,(0\,,321 - 0\,,00117\,t)$
20	$24\,,80 - t\,(0\,,091 - 0\,,00033\,t) + \xi\,(0\,,326 - 0\,,00119\,t)$
40	$25\,,21 - t\,(0\,,092 - 0\,,00034\,t) + \xi\,(0\,,331 - 0\,,00121\,t)$
23 0	$25\,,63 - t\,(0\,,094 - 0\,,00034\,t) + \xi\,(0\,,337 - 0\,,00123\,t)$
20	$26\,,04 - t\,(0\,,095 - 0\,,00035\,t) + \xi\,(0\,,342 - 0\,,00125\,t)$
40	$26\,,46 - t\,(0\,,097 - 0\,,00036\,t) + \xi\,(0\,,347 - 0\,,00127\,t)$
24 0	$26\,,88 - t\,(0\,,099 - 0\,,00036\,t) + \xi\,(0\,,353 - 0\,,00129\,t)$
20	$27\,,30 - t\,(0\,,100 - 0\,,00037\,t) + \xi\,(0\,,358 - 0\,,00131\,t)$
40	$27\,,72 - t\,(0\,,102 - 0\,,00037\,t) + \xi\,(0\,,364 - 0\,,00133\,t)$
25 0	$28\,,15 - t\,(0\,,103 - 0\,,00038\,t) + \xi\,(0\,,370 - 0\,,00135\,t)$
20	$28\,,58 - t\,(0\,,105 - 0\,,00038\,t) + \xi\,(0\,,375 - 0\,,00137\,t)$
40	$29\,,01 - t\,(0\,,106 - 0\,,00039\,t) + \xi\,(0\,,381 - 0\,,00139\,t)$
26 0	$29\,,44 - t\,(0\,,108 - 0\,,00040\,t) + \xi\,(0\,,387 - 0\,,00141\,t)$
20	$29\,,88 - t\,(0\,,109 - 0\,,00040\,t) + \xi\,(0\,,392 - 0\,,00143\,t)$
40	$30\,,32 - t\,(0\,,111 - 0\,,00041\,t) + \xi\,(0\,,398 - 0\,,00145\,t)$
27 0	$30\,,76 - t\,(0\,,113 - 0\,,00041\,t) + \xi\,(0\,,404 - 0\,,00148\,t)$
20	$31\,,20 - t\,(0\,,114 - 0\,,00042\,t) + \xi\,(0\,,410 - 0\,,00150\,t)$
40	$31\,,64 - t\,(0\,,116 - 0\,,00042\,t) + \xi\,(0\,,416 - 0\,,00152\,t)$
28 0	$32\,,09 - t\,(0\,,118 - 0\,,00043\,t) + \xi\,(0\,,422 - 0\,,00154\,t)$
20	$32\,,54 - t\,(0\,,119 - 0\,,00043\,t) + \xi\,(0\,,428 - 0\,,00156\,t)$
40	$32\,,99 - t\,(0\,,121 - 0\,,00044\,t) + \xi\,(0\,,434 - 0\,,00158\,t)$
29 0	$33\,,45 - t\,(0\,,123 - 0\,,00045\,t) + \xi\,(0\,,440 - 0\,,00160\,t)$
20	$33\,,91 - t\,(0\,,124 - 0\,,00045\,t) + \xi\,(0\,,446 - 0\,,00162\,t)$
40	$34\,,38 - t\,(0\,,126 - 0\,,00046\,t) + \xi\,(0\,,452 - 0\,,00164\,t)$
30 0	$34\,,85 - t\,(0\,,128 - 0\,,00047\,t) + \xi\,(0\,,459 - 0\,,00167\,t)$

Distance zénithale.	Réfraction correspondant à la température t et à la hauteur du baromètre $= 76 + \zeta$ centimètres.
30° 0′	$34'',85 - t(0'',128 - 0'',00047\,t) + \zeta(0'',459 - 0'',00167\,t)$
20	$35,32 - t(0,130 - 0,00048\,t) + \zeta(0,465 - 0,00169\,t)$
40	$35,79 - t(0,132 - 0,00049\,t) + \zeta(0,471 - 0,00171\,t)$
31 0	$36,27 - t(0,133 - 0,00049\,t) + \zeta(0,477 - 0,00174\,t)$
20	$36,75 - t(0,135 - 0,00050\,t) + \zeta(0,483 - 0,00176\,t)$
40	$37,23 - t(0,137 - 0,00051\,t) + \zeta(0,489 - 0,00178\,t)$
32 0	$37,71 - t(0,139 - 0,00051\,t) + \zeta(0,496 - 0,00181\,t)$
20	$38,20 - t(0,140 - 0,00052\,t) + \zeta(0,502 - 0,00183\,t)$
40	$38,69 - t(0,142 - 0,00052\,t) + \zeta(0,508 - 0,00185\,t)$
33 0	$39,19 - t(0,144 - 0,00053\,t) + \zeta(0,515 - 0,00188\,t)$
20	$39,69 - t(0,146 - 0,00053\,t) + \zeta(0,521 - 0,00190\,t)$
40	$40,19 - t(0,148 - 0,00054\,t) + \zeta(0,528 - 0,00193\,t)$
34 0	$40,70 - t(0,150 - 0,00055\,t) + \zeta(0,535 - 0,00196\,t)$
20	$41,21 - t(0,151 - 0,00055\,t) + \zeta(0,542 - 0,00198\,t)$
40	$41,72 - t(0,153 - 0,00056\,t) + \zeta(0,549 - 0,00201\,t)$
35 0	$42,25 - t(0,155 - 0,00057\,t) + \zeta(0,556 - 0,00204\,t)$
20	$42,78 - t(0,157 - 0,00057\,t) + \zeta(0,563 - 0,00206\,t)$
40	$43,31 - t(0,159 - 0,00058\,t) + \zeta(0,570 - 0,00209\,t)$
36 0	$43,84 - t(0,161 - 0,00059\,t) + \zeta(0,577 - 0,00212\,t)$
20	$44,38 - t(0,163 - 0,00060\,t) + \zeta(0,584 - 0,00214\,t)$
40	$44,92 - t(0,165 - 0,00061\,t) + \zeta(0,591 - 0,00217\,t)$
37 0	$45,47 - t(0,167 - 0,00061\,t) + \zeta(0,599 - 0,00220\,t)$
20	$46,02 - t(0,169 - 0,00062\,t) + \zeta(0,606 - 0,00222\,t)$
40	$46,58 - t(0,171 - 0,00062\,t) + \zeta(0,613 - 0,00225\,t)$
38 0	$47,14 - t(0,173 - 0,00063\,t) + \zeta(0,621 - 0,00228\,t)$
20	$47,71 - t(0,175 - 0,00063\,t) + \zeta(0,628 - 0,00230\,t)$
40	$48,28 - t(0,177 - 0,00064\,t) + \zeta(0,635 - 0,00233\,t)$
39 0	$48,86 - t(0,179 - 0,00065\,t) + \zeta(0,643 - 0,00236\,t)$
20	$49,44 - t(0,181 - 0,00066\,t) + \zeta(0,650 - 0,00239\,t)$
40	$50,03 - t(0,183 - 0,00067\,t) + \zeta(0,658 - 0,00242\,t)$
40 0	$50,62 - t(0,186 - 0,00068\,t) + \zeta(0,666 - 0,00245\,t)$
20	$51,22 - t(0,188 - 0,00068\,t) + \zeta(0,674 - 0,00248\,t)$
40	$51,83 - t(0,190 - 0,00069\,t) + \zeta(0,682 - 0,00251\,t)$
41 0	$52,44 - t(0,193 - 0,00070\,t) + \zeta(0,690 - 0,00254\,t)$
20	$53,06 - t(0,195 - 0,00071\,t) + \zeta(0,698 - 0,00257\,t)$
40	$53,69 - t(0,197 - 0,00072\,t) + \zeta(0,706 - 0,00260\,t)$
42 0	$54,32 - t(0,200 - 0,00073\,t) + \zeta(0,715 - 0,00263\,t)$
20	$54,96 - t(0,202 - 0,00073\,t) + \zeta(0,723 - 0,00266\,t)$
40	$55,60 - t(0,204 - 0,00074\,t) + \zeta(0,732 - 0,00269\,t)$
43 0	$56,25 - t(0,207 - 0,00075\,t) + \zeta(0,741 - 0,00272\,t)$
20	$56,91 - t(0,209 - 0,00076\,t) + \zeta(0,749 - 0,00275\,t)$
40	$57,57 - t(0,211 - 0,00077\,t) + \zeta(0,758 - 0,00278\,t)$
44 0	$58,24 - t(0,214 - 0,00078\,t) + \zeta(0,767 - 0,00282\,t)$
20	$58,92 - t(0,216 - 0,00079\,t) + \zeta(0,776 - 0,00285\,t)$
40	$59,61 - t(0,219 - 0,00080\,t) + \zeta(0,785 - 0,00288\,t)$
45 0	$60,31 - t(0,222 - 0,00081\,t) + \zeta(0,794 - 0,00292\,t)$

Distance zénithale.	Réfraction correspondant à la température t et à la hauteur du baromètre $= 76 + \xi$ centimètres.
45° 0′	$60'',31 - t\,(0'',222 - 0'',00081\,t) + \xi\,(0'',794 - 0'',00292\,t)$
20	$61,02 - t\,(0,224 - 0,00082\,t) + \xi\,(0,803 - 0,00295\,t)$
40	$61,73 - t\,(0,227 - 0,00083\,t) + \xi\,(0,812 - 0,00299\,t)$
46 0	$62,45 - t\,(0,230 - 0,00084\,t) + \xi\,(0,822 - 0,00303\,t)$
20	$63,18 - t\,(0,232 - 0,00085\,t) + \xi\,(0,831 - 0,00306\,t)$
40	$63,92 - t\,(0,235 - 0,00086\,t) + \xi\,(0,841 - 0,00309\,t)$
47 0	$64,66 - t\,(0,238 - 0,00087\,t) + \xi\,(0,851 - 0,00313\,t)$
20	$65,42 - t\,(0,240 - 0,00088\,t) + \xi\,(0,861 - 0,00316\,t)$
40	$66,19 - t\,(0,243 - 0,00089\,t) + \xi\,(0,871 - 0,00320\,t)$
48 0	$66,96 - t\,(0,246 - 0,00090\,t) + \xi\,(0,882 - 0,00324\,t)$
20	$67,75 - t\,(0,249 - 0,00091\,t) + \xi\,(0,892 - 0,00328\,t)$
40	$68,55 - t\,(0,252 - 0,00092\,t) + \xi\,(0,902 - 0,00332\,t)$
49 0	$69,35 - t\,(0,255 - 0,00093\,t) + \xi\,(0,913 - 0,00336\,t)$
20	$70,17 - t\,(0,258 - 0,00094\,t) + \xi\,(0,924 - 0,00340\,t)$
40	$71,00 - t\,(0,261 - 0,00095\,t) + \xi\,(0,935 - 0,00344\,t)$
50 0	$71,84 - t\,(0,264 - 0,00097\,t) + \xi\,(0,946 - 0,00348\,t)$
20	$72,69 - t\,(0,267 - 0,00098\,t) + \xi\,(0,957 - 0,00352\,t)$
40	$73,56 - t\,(0,270 - 0,00099\,t) + \xi\,(0,968 - 0,00356\,t)$
51 0	$74,44 - t\,(0,274 - 0,00100\,t) + \xi\,(0,980 - 0,00361\,t)$
20	$75,33 - t\,(0,277 - 0,00101\,t) + \xi\,(0,992 - 0,00366\,t)$
40	$76,23 - t\,(0,280 - 0,00102\,t) + \xi\,(1,004 - 0,00370\,t)$
52 0	$77,14 - t\,(0,284 - 0,00104\,t) + \xi\,(1,016 - 0,00374\,t)$
20	$78,07 - t\,(0,287 - 0,00105\,t) + \xi\,(1,028 - 0,00378\,t)$
40	$79,01 - t\,(0,290 - 0,00106\,t) + \xi\,(1,040 - 0,00383\,t)$
53 0	$79,97 - t\,(0,294 - 0,00107\,t) + \xi\,(1,053 - 0,00388\,t)$
20	$80,94 - t\,(0,297 - 0,00108\,t) + \xi\,(1,066 - 0,00392\,t)$
40	$81,93 - t\,(0,301 - 0,00109\,t) + \xi\,(1,079 - 0,00397\,t)$
54 0	$82,93 - t\,(0,305 - 0,00111\,t) + \xi\,(1,092 - 0,00402\,t)$
20	$83,95 - t\,(0,308 - 0,00112\,t) + \xi\,(1,105 - 0,00407\,t)$
40	$84,99 - t\,(0,312 - 0,00113\,t) + \xi\,(1,119 - 0,00412\,t)$
55 0	$86,04 - t\,(0,316 - 0,00115\,t) + \xi\,(1,133 - 0,00418\,t)$
20	$87,11 - t\,(0,320 - 0,00116\,t) + \xi\,(1,147 - 0,00423\,t)$
40	$88,20 - t\,(0,324 - 0,00118\,t) + \xi\,(1,161 - 0,00428\,t)$
56 0	$89,30 - t\,(0,328 - 0,00120\,t) + \xi\,(1,176 - 0,00434\,t)$
20	$90,42 - t\,(0,332 - 0,00121\,t) + \xi\,(1,191 - 0,00440\,t)$
40	$91,56 - t\,(0,336 - 0,00123\,t) + \xi\,(1,206 - 0,00446\,t)$
57 0	$92,73 - t\,(0,341 - 0,00125\,t) + \xi\,(1,221 - 0,00452\,t)$
20	$93,92 - t\,(0,345 - 0,00126\,t) + \xi\,(1,237 - 0,00458\,t)$
40	$95,12 - t\,(0,349 - 0,00128\,t) + \xi\,(1,253 - 0,00464\,t)$
58 0	$96,35 - t\,(0,354 - 0,00130\,t) + \xi\,(1,269 - 0,00470\,t)$
20	$97,60 - t\,(0,359 - 0,00132\,t) + \xi\,(1,286 - 0,00476\,t)$
40	$98,88 - t\,(0,364 - 0,00134\,t) + \xi\,(1,303 - 0,00482\,t)$
59 0	$100,18 - t\,(0,369 - 0,00135\,t) + \xi\,(1,320 - 0,00489\,t)$
20	$101,51 - t\,(0,374 - 0,00137\,t) + \xi\,(1,337 - 0,00495\,t)$
40	$102,86 - t\,(0,379 - 0,00138\,t) + \xi\,(1,355 - 0,00502\,t)$
60 0	$104,23 - t\,(0,384 - 0,00140\,t) + \xi\,(1,373 - 0,00509\,t)$

Distance zénithale.	Réfraction correspondant à la température t et à la hauteur du baromètre $= 76 + \xi$ centimètres.
60° 0′	$104'',23 - t\,(0'',384 - 0'',00140\,t) + \xi\,(1'',373 - 0'',00509\,t)$
10	$104\,,93 - t\,(0\,,386 - 0\,,00141\,t) + \xi\,(1\,,382 - 0\,,00512\,t)$
20	$105\,,64 - t\,(0\,,389 - 0\,,00142\,t) + \xi\,(1\,,391 - 0\,,00515\,t)$
30	$106\,,35 - t\,(0\,,392 - 0\,,00143\,t) + \xi\,(1\,,401 - 0\,,00519\,t)$
40	$107\,,07 - t\,(0\,,394 - 0\,,00144\,t) + \xi\,(1\,,410 - 0\,,00522\,t)$
50	$107\,,80 - t\,(0\,,397 - 0\,,00145\,t) + \xi\,(1\,,420 - 0\,,00526\,t)$
61 0	$108\,,53 - t\,(0\,,400 - 0\,,00146\,t) + \xi\,(1\,,430 - 0\,,00530\,t)$
10	$109\,,27 - t\,(0\,,402 - 0\,,00147\,t) + \xi\,(1\,,439 - 0\,,00533\,t)$
20	$110\,,02 - t\,(0\,,405 - 0\,,00148\,t) + \xi\,(1\,,449 - 0\,,00537\,t)$
30	$110\,,78 - t\,(0\,,408 - 0\,,00149\,t) + \xi\,(1\,,459 - 0\,,00541\,t)$
40	$111\,,55 - t\,(0\,,411 - 0\,,00150\,t) + \xi\,(1\,,469 - 0\,,00545\,t)$
50	$112\,,33 - t\,(0\,,414 - 0\,,00151\,t) + \xi\,(1\,,479 - 0\,,00549\,t)$
62 0	$113\,,11 - t\,(0\,,417 - 0\,,00152\,t) + \xi\,(1\,,490 - 0\,,00553\,t)$
10	$113\,,90 - t\,(0\,,420 - 0\,,00153\,t) + \xi\,(1\,,500 - 0\,,00557\,t)$
20	$114\,,70 - t\,(0\,,423 - 0\,,00154\,t) + \xi\,(1\,,511 - 0\,,00561\,t)$
30	$115\,,51 - t\,(0\,,426 - 0\,,00155\,t) + \xi\,(1\,,522 - 0\,,00565\,t)$
40	$116\,,33 - t\,(0\,,429 - 0\,,00156\,t) + \xi\,(1\,,533 - 0\,,00569\,t)$
50	$117\,,16 - t\,(0\,,432 - 0\,,00157\,t) + \xi\,(1\,,544 - 0\,,00573\,t)$
63 0	$118\,,00 - t\,(0\,,435 - 0\,,00159\,t) + \xi\,(1\,,555 - 0\,,00578\,t)$
10	$118\,,85 - t\,(0\,,438 - 0\,,00160\,t) + \xi\,(1\,,566 - 0\,,00582\,t)$
20	$119\,,71 - t\,(0\,,441 - 0\,,00161\,t) + \xi\,(1\,,577 - 0\,,00586\,t)$
30	$120\,,57 - t\,(0\,,444 - 0\,,00162\,t) + \xi\,(1\,,588 - 0\,,00591\,t)$
40	$121\,,44 - t\,(0\,,447 - 0\,,00163\,t) + \xi\,(1\,,599 - 0\,,00595\,t)$
50	$122\,,32 - t\,(0\,,450 - 0\,,00164\,t) + \xi\,(1\,,611 - 0\,,00600\,t)$
64 0	$123\,,22 - t\,(0\,,454 - 0\,,00166\,t) + \xi\,(1\,,623 - 0\,,00605\,t)$
10	$124\,,13 - t\,(0\,,457 - 0\,,00167\,t) + \xi\,(1\,,635 - 0\,,00609\,t)$
20	$125\,,04 - t\,(0\,,461 - 0\,,00168\,t) + \xi\,(1\,,647 - 0\,,00614\,t)$
30	$125\,,97 - t\,(0\,,465 - 0\,,00170\,t) + \xi\,(1\,,659 - 0\,,00619\,t)$
40	$126\,,91 - t\,(0\,,468 - 0\,,00171\,t) + \xi\,(1\,,671 - 0\,,00623\,t)$
50	$127\,,86 - t\,(0\,,472 - 0\,,00172\,t) + \xi\,(1\,,684 - 0\,,00628\,t)$
65 0	$128\,,83 - t\,(0\,,476 - 0\,,00174\,t) + \xi\,(1\,,697 - 0\,,00633\,t)$
10	$129\,,80 - t\,(0\,,479 - 0\,,00175\,t) + \xi\,(1\,,710 - 0\,,00638\,t)$
20	$130\,,79 - t\,(0\,,483 - 0\,,00176\,t) + \xi\,(1\,,723 - 0\,,00643\,t)$
30	$131\,,79 - t\,(0\,,487 - 0\,,00178\,t) + \xi\,(1\,,736 - 0\,,00648\,t)$
40	$132\,,80 - t\,(0\,,491 - 0\,,00179\,t) + \xi\,(1\,,749 - 0\,,00653\,t)$
50	$133\,,83 - t\,(0\,,495 - 0\,,00180\,t) + \xi\,(1\,,763 - 0\,,00658\,t)$
66 0	$134\,,87 - t\,(0\,,499 - 0\,,00182\,t) + \xi\,(1\,,777 - 0\,,00664\,t)$
10	$135\,,92 - t\,(0\,,503 - 0\,,00183\,t) + \xi\,(1\,,791 - 0\,,00669\,t)$
20	$136\,,98 - t\,(0\,,507 - 0\,,00184\,t) + \xi\,(1\,,805 - 0\,,00675\,t)$
30	$138\,,06 - t\,(0\,,511 - 0\,,00186\,t) + \xi\,(1\,,819 - 0\,,00681\,t)$
40	$139\,,15 - t\,(0\,,515 - 0\,,00187\,t) + \xi\,(1\,,833 - 0\,,00686\,t)$
50	$140\,,26 - t\,(0\,,519 - 0\,,00189\,t) + \xi\,(1\,,848 - 0\,,00692\,t)$
67 0	$141\,,38 - t\,(0\,,523 - 0\,,00191\,t) + \xi\,(1\,,863 - 0\,,00698\,t)$
10	$142\,,52 - t\,(0\,,527 - 0\,,00192\,t) + \xi\,(1\,,878 - 0\,,00704\,t)$
20	$143\,,67 - t\,(0\,,531 - 0\,,00194\,t) + \xi\,(1\,,893 - 0\,,00710\,t)$
30	$144\,,84 - t\,(0\,,536 - 0\,,00196\,t) + \xi\,(1\,,909 - 0\,,00716\,t)$

Distance zénithale.	Réfraction correspondant à la température t et à la hauteur du baromètre $= 76 + \xi$ centimètres.
67° 30′	$144'',84 - t\,(0'',536 - 0'',00196\,t) + \xi\,(1'',91 - 0'',00716\,t)$
40	$146,03 - t\,(0,540 - 0,00197\,t) + \xi\,(1,93 - 0,00722\,t)$
50	$147,23 - t\,(0,545 - 0,00199\,t) + \xi\,(1,95 - 0,00728\,t)$
68 0	$148,45 - t\,(0,550 - 0,00201\,t) + \xi\,(1,97 - 0,00734\,t)$
10	$149,69 - t\,(0,554 - 0,00202\,t) + \xi\,(1,98 - 0,00740\,t)$
20	$150,94 - t\,(0,559 - 0,00204\,t) + \xi\,(1,99 - 0,00746\,t)$
30	$152,21 - t\,(0,564 - 0,00206\,t) + \xi\,(2,01 - 0,00753\,t)$
40	$153,50 - t\,(0,569 - 0,00207\,t) + \xi\,(2,03 - 0,00760\,t)$
50	$154,80 - t\,(0,574 - 0,00209\,t) + \xi\,(2,05 - 0,00767\,t)$
69 0	$156,13 - t\,(0,579 - 0,00211\,t) + \xi\,(2,06 - 0,00774\,t)$
10	$157,48 - t\,(0,584 - 0,00213\,t) + \xi\,(2,08 - 0,00781\,t)$
20	$158,85 - t\,(0,589 - 0,00215\,t) + \xi\,(2,10 - 0,00788\,t)$
30	$160,24 - t\,(0,594 - 0,00217\,t) + \xi\,(2,12 - 0,00796\,t)$
40	$161,65 - t\,(0,599 - 0,00219\,t) + \xi\,(2,14 - 0,00803\,t)$
50	$163,08 - t\,(0,605 - 0,00221\,t) + \xi\,(2,16 - 0,00811\,t)$
70 0	$164,53 - t\,(0,611 - 0,00223\,t) + \xi\,(2,18 - 0,00819\,t)$
10	$166,01 - t\,(0,616 - 0,00225\,t) + \xi\,(2,20 - 0,00826\,t)$
20	$167,51 - t\,(0,623 - 0,00227\,t) + \xi\,(2,22 - 0,00834\,t)$
30	$169,03 - t\,(0,629 - 0,00229\,t) + \xi\,(2,24 - 0,00842\,t)$
40	$170,58 - t\,(0,636 - 0,00232\,t) + \xi\,(2,26 - 0,00850\,t)$
50	$172,16 - t\,(0,642 - 0,00234\,t) + \xi\,(2,28 - 0,00858\,t)$
71 0	$173,76 - t\,(0,648 - 0,00236\,t) + \xi\,(2,30 - 0,00867\,t)$
10	$175,39 - t\,(0,654 - 0,00238\,t) + \xi\,(2,32 - 0,00875\,t)$
20	$177,04 - t\,(0,660 - 0,00240\,t) + \xi\,(2,34 - 0,00884\,t)$
30	$178,72 - t\,(0,667 - 0,00243\,t) + \xi\,(2,37 - 0,00893\,t)$
40	$180,43 - t\,(0,673 - 0,00246\,t) + \xi\,(2,39 - 0,00902\,t)$
50	$182,17 - t\,(0,680 - 0,00249\,t) + \xi\,(2,41 - 0,00911\,t)$
72 0	$183,93 - t\,(0,688 - 0,00252\,t) + \xi\,(2,44 - 0,00921\,t)$
10	$185,73 - t\,(0,695 - 0,00254\,t) + \xi\,(2,46 - 0,00931\,t)$
20	$187,56 - t\,(0,702 - 0,00257\,t) + \xi\,(2,49 - 0,00941\,t)$
30	$189,43 - t\,(0,709 - 0,00260\,t) + \xi\,(2,51 - 0,00951\,t)$
40	$191,33 - t\,(0,716 - 0,00262\,t) + \xi\,(2,54 - 0,00961\,t)$
50	$193,26 - t\,(0,723 - 0,00265\,t) + \xi\,(2,56 - 0,00971\,t)$
73 0	$195,23 - t\,(0,731 - 0,00268\,t) + \xi\,(2,58 - 0,00982\,t)$
10	$197,23 - t\,(0,738 - 0,00271\,t) + \xi\,(2,60 - 0,00993\,t)$
20	$199,27 - t\,(0,746 - 0,00274\,t) + \xi\,(2,63 - 0,01004\,t)$
30	$201,35 - t\,(0,754 - 0,00277\,t) + \xi\,(2,66 - 0,01016\,t)$
40	$203,47 - t\,(0,763 - 0,00280\,t) + \xi\,(2,69 - 0,01028\,t)$
50	$205,63 - t\,(0,771 - 0,00283\,t) + \xi\,(2,72 - 0,01040\,t)$
74 0	$207,83 - t\,(0,780 - 0,00286\,t) + \xi\,(2,76 - 0,01052\,t)$
10	$210,08 - t\,(0,789 - 0,00289\,t) + \xi\,(2,79 - 0,01065\,t)$
20	$212,37 - t\,(0,798 - 0,00292\,t) + \xi\,(2,82 - 0,01078\,t)$
30	$214,71 - t\,(0,807 - 0,00296\,t) + \xi\,(2,85 - 0,01091\,t)$
40	$217,10 - t\,(0,816 - 0,00299\,t) + \xi\,(2,87 - 0,01105\,t)$
50	$212,54 - t\,(0,825 - 0,00302\,t) + \xi\,(2,90 - 0,01119\,t)$
75 0	$222,02 - t\,(0,835 - 0,00306\,t) + \xi\,(2,94 - 0,01133\,t)$

Distance zénithale.	Réfraction correspondant à la température t et à la hauteur du baromètre $= 76 + \xi$ centimètres.
75° 0′	$222'',02 - t(0'',83 - 0'',0031\,t) + \xi(2'',94 - 0'',0113\,t)$
10	$224,55 - t(0,84 - 0,0031\,t) + \xi(2,97 - 0,0114\,t)$
20	$227,14 - t(0,86 - 0,0031\,t) + \xi(3,01 - 0,0116\,t)$
30	$229,78 - t(0,87 - 0,0032\,t) + \xi(3,04 - 0,0117\,t)$
40	$232,48 - t(0,88 - 0,0032\,t) + \xi(3,07 - 0,0119\,t)$
50	$235,24 - t(0,89 - 0,0033\,t) + \xi(3,11 - 0,0120\,t)$
76 0	$238,06 - t(0,90 - 0,0033\,t) + \xi(3,15 - 0,0121\,t)$
10	$240,94 - t(0,91 - 0,0034\,t) + \xi(3,19 - 0,0123\,t)$
20	$243,89 - t(0,92 - 0,0034\,t) + \xi(3,23 - 0,0124\,t)$
30	$246,91 - t(0,93 - 0,0034\,t) + \xi(3,27 - 0,0126\,t)$
40	$250,01 - t(0,95 - 0,0035\,t) + \xi(3,31 - 0,0128\,t)$
50	$253,17 - t(0,96 - 0,0035\,t) + \xi(3,35 - 0,0129\,t)$
77 0	$256,40 - t(0,97 - 0,0036\,t) + \xi(3,39 - 0,0130\,t)$
10	$259,71 - t(0,98 - 0,0036\,t) + \xi(3,44 - 0,0132\,t)$
20	$263,11 - t(1,00 - 0,0037\,t) + \xi(3,48 - 0,0134\,t)$
30	$266,58 - t(1,01 - 0,0037\,t) + \xi(3,53 - 0,0136\,t)$
40	$270,14 - t(1,02 - 0,0038\,t) + \xi(3,58 - 0,0138\,t)$
50	$273,80 - t(1,04 - 0,0038\,t) + \xi(3,62 - 0,0140\,t)$
78 0	$277,55 - t(1,05 - 0,0039\,t) + \xi(3,67 - 0,0143\,t)$
10	$281,39 - t(1,06 - 0,0039\,t) + \xi(3,73 - 0,0145\,t)$
20	$285,34 - t(1,08 - 0,0040\,t) + \xi(3,78 - 0,0147\,t)$
30	$289,39 - t(1,10 - 0,0040\,t) + \xi(3,83 - 0,0149\,t)$
40	$293,55 - t(1,12 - 0,0041\,t) + \xi(3,89 - 0,0151\,t)$
50	$297,83 - t(1,14 - 0,0042\,t) + \xi(3,95 - 0,0154\,t)$
79 0	$302,22 - t(1,15 - 0,0042\,t) + \xi(4,00 - 0,0156\,t)$
10	$306,74 - t(1,16 - 0,0043\,t) + \xi(4,06 - 0,0159\,t)$
20	$311,38 - t(1,18 - 0,0044\,t) + \xi(4,13 - 0,0161\,t)$
30	$316,16 - t(1,20 - 0,0044\,t) + \xi(4,19 - 0,0163\,t)$
40	$321,08 - t(1,22 - 0,0045\,t) + \xi(4,25 - 0,0165\,t)$
50	$326,14 - t(1,24 - 0,0046\,t) + \xi(4,32 - 0,0168\,t)$
80 0	$331,35 - t(1,27 - 0,0047\,t) + \xi(4,40 - 0,0170\,t)$
10	$336,72 - t(1,30 - 0,0048\,t) + \xi(4,48 - 0,0173\,t)$
20	$342,25 - t(1,33 - 0,0049\,t) + \xi(4,56 - 0,0177\,t)$
30	$347,96 - t(1,35 - 0,0050\,t) + \xi(4,64 - 0,0180\,t)$
40	$353,86 - t(1,38 - 0,0051\,t) + \xi(4,71 - 0,0183\,t)$
50	$359,94 - t(1,40 - 0,0052\,t) + \xi(4,79 - 0,0187\,t)$
81 0	$366,23 - t(1,43 - 0,0053\,t) + \xi(4,88 - 0,0191\,t)$
10	$372,73 - t(1,46 - 0,0054\,t) + \xi(4,97 - 0,0194\,t)$
20	$379,44 - t(1,49 - 0,0055\,t) + \xi(5,06 - 0,0198\,t)$
30	$386,38 - t(1,51 - 0,0056\,t) + \xi(5,15 - 0,0202\,t)$
40	$393,56 - t(1,54 - 0,0057\,t) + \xi(5,25 - 0,0206\,t)$
50	$401,00 - t(1,58 - 0,0059\,t) + \xi(5,36 - 0,0210\,t)$
82 0	$408,71 - t(1,61 - 0,0060\,t) + \xi(5,47 - 0,0215\,t)$
10	$416,69 - t(1,65 - 0,0061\,t) + \xi(5,57 - 0,0220\,t)$
20	$424,97 - t(1,68 - 0,0063\,t) + \xi(5,68 - 0,0225\,t)$
30	$433,57 - t(1,72 - 0,0064\,t) + \xi(5,79 - 0,0230\,t)$

Distance zénithale.	Réfraction correspondant à la température t et à la hauteur du baromètre $= 76 + \xi$ centimètres.
82° 30′	$433'',6 - t(1'',72 - 0'',0064\,t) + \xi(5'',79 - 0'',023\,t)$
40	$442,5 - t(1,76 - 0,0066\,t) + \xi(5,91 - 0,024\,t)$
50	$451,8 - t(1,80 - 0,0067\,t) + \xi(6,04 - 0,024\,t)$
83 0	$461,5 - t(1,85 - 0,0069\,t) + \xi(6,18 - 0,025\,t)$
10	$471,5 - t(1,89 - 0,0071\,t) + \xi(6,32 - 0,026\,t)$
20	$482,0 - t(1,94 - 0,0072\,t) + \xi(6,47 - 0,026\,t)$
30	$492,9 - t(1,99 - 0,0074\,t) + \xi(6,62 - 0,027\,t)$
40	$504,3 - t(2,04 - 0,0077\,t) + \xi(6,77 - 0,027\,t)$
50	$516,2 - t(2,10 - 0,0079\,t) + \xi(6,92 - 0,028\,t)$
84 0	$528,6 - t(2,16 - 0,0081\,t) + \xi(7,08 - 0,029\,t)$
10	$541,6 - t(2,22 - 0,0083\,t) + \xi(7,26 - 0,030\,t)$
20	$555,2 - t(2,29 - 0,0086\,t) + \xi(7,45 - 0,031\,t)$
30	$569,4 - t(2,36 - 0,0089\,t) + \xi(7,65 - 0,032\,t)$
40	$584,3 - t(2,43 - 0,0092\,t) + \xi(7,85 - 0,033\,t)$
50	$600,0 - t(2,50 - 0,0096\,t) + \xi(8,06 - 0,034\,t)$
85 0	$616,4 - t(2,58 - 0,0100\,t) + \xi(8,29 - 0,035\,t)$
10	$633,7 - t(2,67 - 0,0105\,t) + \xi(8,53 - 0,036\,t)$
20	$651,9 - t(2,76 - 0,0110\,t) + \xi(8,78 - 0,037\,t)$
30	$671,1 - t(2,86 - 0,0114\,t) + \xi(9,03 - 0,039\,t)$
40	$691,3 - t(2,97 - 0,0119\,t) + \xi(9,31 - 0,041\,t)$
50	$712,7 - t(3,09 - 0,0124\,t) + \xi(9,60 - 0,043\,t)$
86 0	$735,2 - t(3,21 - 0,0129\,t) + \xi(9,90 - 0,045\,t)$
10	$759,1 - t(3,35 - 0,0133\,t) + \xi(10,23 - 0,046\,t)$
20	$784,5 - t(3,49 - 0,0138\,t) + \xi(10,59 - 0,048\,t)$
30	$811,3 - t(3,65 - 0,0143\,t) + \xi(10,99 - 0,050\,t)$
40	$839,8 - t(3,82 - 0,0149\,t) + \xi(11,41 - 0,052\,t)$
50	$870,2 - t(4,01 - 0,0157\,t) + \xi(11,84 - 0,055\,t)$
87 0	$902,6 - t(4,22 - 0,0167\,t) + \xi(12,29 - 0,058\,t)$
10	$937,3 - t(4,45 - 0,0178\,t) + \xi(12,78 - 0,062\,t)$
20	$974,2 - t(4,71 - 0,0191\,t) + \xi(13,31 - 0,067\,t)$
30	$1013,3 - t(4,99 - 0,0205\,t) + \xi(13,87 - 0,071\,t)$
40	$1055,2 - t(5,30 - 0,0221\,t) + \xi(14,48 - 0,076\,t)$
50	$1100,4 - t(5,64 - 0,0239\,t) + \xi(15,15 - 0,081\,t)$
88 0	$1149,1 - t(6,01 - 0,0261\,t) + \xi(15,86 - 0,087\,t)$
10	$1201,2 - t(6,44 - 0,0286\,t) + \xi(16,61 - 0,094\,t)$
20	$1257,3 - t(6,93 - 0,0316\,t) + \xi(17,42 - 0,102\,t)$
30	$1317,8 - t(7,46 - 0,0350\,t) + \xi(18,34 - 0,112\,t)$
40	$1383,1 - t(8,08 - 0,0390\,t) + \xi(19,35 - 0,123\,t)$
50	$1453,5 - t(8,80 - 0,0440\,t) + \xi(20,49 - 0,135\,t)$
89 0	$1529,0 - t(9,63 - 0,0498\,t) + \xi(21,72 - 0,148\,t)$
10	$1609,6 - t(10,59 - 0,0576\,t) + \xi(22,94 - 0,163\,t)$
20	$1695,8 - t(11,70 - 0,0668\,t) + \xi(24,28 - 0,182\,t)$
30	$1787,2 - t(12,99 - 0,0802\,t) + \xi(25,79 - 0,204\,t)$
40	$1884,3 - t(14,44 - 0,0978\,t) + \xi(27,37 - 0,232\,t)$

ERRATA.

Page	2,	ligne	24,	*au lieu de* snivante,	*lisez* suivante
—	26,	—	1,	$\alpha(1-\omega)$	$\alpha\omega$
—	26	—	2	$\frac{h}{a}-\alpha(1-\omega)=u$	$\frac{h}{a}-\alpha\omega=u$
—	42	—	23	la participation de la valeur	la précipitation de la vapeur
—	51	—	27	333,34	331,34
—	53	—	22	$\frac{2a+h}{2}$	$\frac{2a+h}{h}$
—	53	—	23	$-\xi \operatorname{Cos} r$	$-\xi \operatorname{Cos} \frac{r}{2}$
—	108	—	24	$\varepsilon = 1.1975$	$\varepsilon = 0{,}1975$
—	113	—	1	63° 40′	65° 40′
—	115	—	23	1235,3	1335,3
—	115	—	24	0,31	0,41

TABLES DES MATIÈRES.

Page.

Différentielle de la réfraction astronomique, et valeur du rayon de courbure de la courbe de la réfraction . . . . . 1.

Remarques sur la formule barométrique; modification de la formule de Laplace . . . . . 10.

Intégration de la différentielle de la réfraction dans le cas où la température d'une couche atmosphérique est exprimée, ou en fonction de la hauteur de cette couche, ou en fonction de sa densité . . . . . 18.

Remarques sur les théories des réfractions données par Laplace, Ivory, Gylden, Lubbock et Bauernfeind. La presque coïncidence de ces théories . . . . . 25.

Remarques sur la réfraction terrestre; possibilité de trouver cette réfraction lorqu'on a fait des observations soignées du baromètre et de la température de l'air dans les deux stations . . 50.

Déduction de la loi de température dans l'atmosphère terrestre à l'aide des principes fournis par la théorie mécanique de la chaleur. Comparaison de la théorie avec les observations . . 57.

Série exprimant la réfraction astronomique jusqu'à la hauteur de l'astre de dix degrés . . . . . 77.

Calcul de la réfraction pour les hauteurs moindres que dix degrés jnsqu'à l'horizon . . . . . 87.

Tables des réfractions calculées à l'aide du paramètre déduit des observations de Glaisher dans la formule exprimant la température de l'air en fonction de sa densité . . . . . 112.

Tables des réfractions construites d'après l'hypothèse de Ivory modifiée par l'addition, au paramètre f, de la quantité βt, où β est le coefficient de la dilatation de l'air, et t exprime la température de l'air observée sur le lieu d'observation . . . . . 121.

Comparaison des réfractions calculées d'après la nouvelle théorie avec celles fournies par les tables de Bessel et de Gylden.

II

Observations des réfractions près de l'horizon faites à Kasan, et leur comparaison avec les réfractions calculées . . . . . 123.

Tables des réfractions astronomiques construites de manière qu'elles n'exigent pas le calcul logarithmique . . . . . 163.

ÜBER DEN

URSPRUNG DER SPRACHE.

In demselben Verlage ist erschienen:

REDE AUF WILHELM GRIMM

UND

REDE ÜBER DAS ALTER

GEHALTEN IN DER KÖNIGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

VON

JACOB GRIMM.

HERAUSGEGEBEN VON HERMAN GRIMM.

ZWEITER UNVERÄNDERTER ABDRUCK.

MIT ZWEI PHOTOGRAPHIEEN (DER BRÜDER GRIMM).

1864. 8. geh. 20 Sgr.

Dritte Auflage (ohne Photographieen). 1865. 8. 10 Sgr.

ÜBER DEN

URSPRUNG DER SPRACHE

VON

JACOB GRIMM.

AUS DEN ABHANDLUNGEN DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN VOM JAHR 1851

SECHSTE AUFLAGE

BERLIN
FERD. DÜMMLER'S VERLAGSBUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN
1866.

God
Ger 432
Geilübe

Von dem groszen weltweisen in unsrer mitte ist die frage, deren gegenstand ich eben bezeichnet habe, und die schon vor achzig jahren unter uns zum preise gestellt war, jüngst bei der philosophischhistorischen classe zweimal angeregt worden. Herr von Schelling machte nemlich den vorschlag eine solche aufgabe jetzt zu wiederholen, zog ihn aber unmittelbar darauf zurück. bald hernach gab er in einer eignen vorlesung einige auskunft über die unzufriedenheit, welche Hamann gegen Herders damals von der akademie gekrönte preisschrift an den tag gelegt hatte[1], so wie proben eines lateinischen gedichts von noch unbekanntem verfasser über der sprache ursprung. hoch zu bedauern ist, dasz er selbst dabei nirgend seine eigene ansicht kundgeben oder errathen lassen wollte; an jener neuen preisaufgabe, wenn sie festgehalten und näher entfaltet worden wäre, würde man darüber wol manches haben entnehmen können, da es kaum möglich scheint einen solchen vorschlag anschaulich zu machen, ohne dasz zugleich im entwurf selbst des preisstellers, und eines solchen preisstellers, meinung bestimmt durchbräche. nur das eine dürfen wir als unzweifelhaft voraus setzen, dasz ihm die herderische lösung wenigstens für unsere zeit keineswegs

[1] Göthe 26, 108 besasz den aufsatz.

genug thut, denn sonst wäre überflüssig gewesen sie neuerdings auf die bahn zu bringen.

Wie man aber auch den im jahr 1770 erlangten und erlangbaren ergebnissen zugethan oder ungeneigt sei, das läszt sich gar nicht in abrede stellen, dasz seitdem die lage der sprachforschung wesentlich oder gänzlich verändert worden ist und darum schon ein versuch, was sie uns gegenwärtig biete, auf jene frage in erneuter antwort anzuwenden wünschenswerth erscheinen mag, da auf jedweden in philosophische oder historische betrachtung zu ziehenden gegenstand die ihm gewordne gröszere pflege und feinere ausbildung günstig einwirken musz. alle sprachstudien finden sich nun heutzutage ungleich vortheilhafter gestellt und ausgerüstet, als zu jener zeit, ja sie sind, kann man sagen, erst in unserm jahrhundert zur wahren wissenschaft gediehen. die art und weise nach welcher die classischen sprachen ehdem betrieben wurden und in wahrheit immer noch angebaut zu werden pflegen (wie es auch den von mir gewis hochgestellten übrigen zwecken der philologie nicht unangemessen ist), führte nie oder blosz zufällig zu allgemeinen und entscheidenden aufschlüssen über das verhältnis der sprachen unter einander. man mühte sich in das wesen der lateinischen oder griechischen zunge einzudringen so weit es nöthig war, um den geist kostbarer, für alle zeiten bewundernswerther denkmale zu erfassen, die sie hervorgebracht und auf uns überliefert hatten, und dieses geistes habhaft zu werden, dazu gehört unermeszlich viel. solchem ziel gegenüber verhielt sich der sprache noch so gewaltige äuszere erscheinung und form dienend; wahrzunehmen was in ihr über den redebrauch, über die technik der dichter und den inhalt der werke hinaus gieng, war der classischen philologie

gewissermaszen gleichgültig und von allen feiner eingehenden beobachtungen schienen ihr fast nur solche werthvoll, welche der textcritik zu festern regeln irgend verhelfen konnten. für sich selbst zog das innere gewebe der sprache wenig an und wurde in seiner schönheit und fülle gleichsam voraus gesetzt, weshalb auch die auffallendsten worterscheinungen, wo sie ihrem begrif nach klar sich darstellten, meistens unerwogen blieben. etwa wie der seine sprache fertig handhabende, in ihr waltende dichter fast keiner kunde ihres innern baus noch minder ihrer geschichtlichen veränderungen bedarf und nur hin und wieder ein seltnes wort aufsucht, dem er eine gelegne stelle zu geben hat; war der grammatiker auch blosz ausnahmsweise irgend einer ihm anstöszigen wortgestalt der wurzel auf der spur, an welcher er seine kunst zu üben trachtete. so erklärt sich warum lange jahrhunderte hindurch die unablässig fortgesetzte aufmerksame behandlung lateinischer und griechischer sprache auf der schule wie in den stuben der gelehrten mit der einfachen formlehre am wenigsten vorrückte und fast nur für die halb schon auszerhalb der grammatik liegende syntax früchte trug. weder verstand man, wozu diese beiden classischen sprachen gerade mächtig reizen musten, ihre gestalten scharf an einander zu halten und wechselsweise jede mit gleicher berechtigung aus der andern zu erörtern, da man fehlerhaft die lateinische als unterwürfige tochter der griechischen ansah; noch weniger unsrer muttersprache aufzuhelfen, die in der schule allenthalben frohndienste eines unbefugten handlangers zu leisten hatte, geschweige ihr den dritten hauptplatz einzuräumen, obgleich, wie aus drei gegebnen puncten eine figur zu bilden, aus den verhältnissen dreier unter sich verwandter sprachen ihr lebendiges gesetz zu finden ist.

Man hat das sprachstudium vielfach und auch nicht ohne grund dem der naturgeschichte an die seite gestellt; sie gleichen einander sogar in der art und weise ihres mangelhaften oder bessern betriebs. denn ins auge springt, dasz gerade wie jene philologen die classischen sprachdenkmäler um ihnen critische regeln für die emendation beschädigter und verderbter texte abzugewinnen erforschten, so auch die botaniker ihre wissenschaft ursprünglich darauf anlegten in einzelnen kräutern heilsame kräfte zu entdecken, die anatomen in die leiber schnitten, um des innern baus sicher zu werden, auf dessen erkenntnis nun die herstellung der gestörten gesundheit gestützt werden könnte. die stoffe zogen als ein mittel, nicht für sich selbst an. allmälich aber bereitete sich eine änderung der ansicht und des verfahrens vor. da es natürlich ist und durch alle erfahrung bestätigt wird, dasz die menschen an dem einheimischen, ihren augen täglich dargebotnen vorübergehend vom fremden und neuen stärker berührt und zur betrachtung gereizt werden; so darf man wol behaupten, dasz durch reisen ins ausland, wie durch zufuhr fremder, seltner pflanzen in unsre gärten, die übersiedelung vielfacher thiergestalten aus fernen welttheilen nach Europa den wissenschaften ein andres gepräge aufgedrückt wurde und bei erforschung der gegenstände sie von jenen practischen zwecken gleichsam abstanden und sich auf unbefangnere, darum wissenschaftlichere untersuchungen einlieszen. denn das ist eben wahres zeichen der wissenschaft, dasz sie ihr netz auswerfe nach allseitigen ergebnissen und jede wahrnehmbare eigenheit der dinge hasche, hinstelle und der zähesten prüfung unterwerfe, gleichviel was zuletzt daraus hervor gehe. die sprachwissenschaft, wie mich dünkt, hat auf demselben weg, dessen betreten die

pflanzen und thierzergliederung ihrem engeren standpunct entrückte, und zu einer vergleichenden botanik und anatomie erhob, endlich eben so durchgreifende umwälzung erfahren. ohne zweifel wurde durch das von der kaiserin Catharina in den jahren 1787—90 veranstaltete Petersburger wörterbuch, wenn es auch auf noch sehr ungenügenden grundlagen aufgerichtet war, sprachvergleichung überhaupt wirksam angeregt und gefördert. allein weit gröszern einflusz auf sie hatte die in allen welttheilen, hauptsächlich in Indien befestigte herschaft der Briten, durch welche das genaue verständnis einer der reinsten und ehrwürdigsten sprachen der ganzen welt, die man früher beinahe gar nicht gekannt hatte, erweckt, gesichert und verbreitet wurde. die vollkommenheit und gewaltige regel des sanskrit muste, obschon auch den weg bahnend zu einer der ältesten und reichsten poesien, recht dazu einladen sich mit ihr um ihrer selbst willen vertraut zu machen und hat, nachdem das eis einmal gebrochen und gleichsam ein magnet gefunden war, zu welchem die auf dem sprachenocean schiffenden hinschauen konnten, auf die weit erstreckte reihe der mit der indischen unmittelbar zusammenhängenden und verwandten sprachen ein so erhellendes, sonst ungeahntes licht fallen lassen, dasz daraus eine wahrhafte geschichte aller dieser sprachen, wie sie noch nie vor eines sprachforschers auge gestanden hatte, mit tief eindringenden und überraschenden resultaten theils schon hervor gegangen theils eingeleitet worden ist. und da um dieselbe zeit man zugleich bemüht gewesen war, das bisher unbegreiflich gering geachtete gesetz unsrer eignen deutschen sprache historisch zu entfalten, wie der naturforscher in den halmen und knoten einheimischer gräser dieselben wunderbaren triebe erkennen musz, die

er an ausländischen pflanzen wahrnahm; so konnte nicht fehlen, dasz von unserm eigensten und unmittelbarsten standpunct aus zugleich der blick auf die uns benachbarten slavischen, littauischen und keltischen sprachen lebhafter geworfen wurde, welchen allmälich allen die nemliche geschichtliche bedeutung und betrachtung zu theil geworden ist oder zweifelsohne werden wird. auf solche weise haben sich, wo nicht alle, doch die meisten glieder einer groszen fast unabsehbaren sprachkette gefunden, die in ihren wurzeln und flexionen aus Asien bis her zu uns reicht, beinahe ganz Europa erfüllt und schon jetzt die mächtigste zunge des erdbodens genannt werden darf, auf welchem sie unaufhaltsam weiter fortschreitet, den sie einmal überall erfüllen wird. diese indogermanische sprache musz nun zugleich durch ihren innern bau, der sich an ihr in unendlichen abstufungen klar verfolgen läszt, wenn es irgend eine andere sprache im stande ist, auch über den allgemeinen gang und verlauf der menschlichen sprache, vielleicht über deren ursprung die ergibigsten aufschlüsse darreichen.

Ich bin befugt die thunlichkeit dieser untersuchung über den ursprung der sprache als bloszes problem hinzustellen, dessen gelingen noch von vielen darf in zweifel gezogen werden. sollte es sich lösen können, mögen solche zweifler einwenden, so hätten unsere sprachen und unsere geschichte viel weiter als sie thun zurück zu reichen, denn es ist glaublich, vielmehr es ist schon ausgemacht, dasz die ältesten denkmäler der sanskrit- oder zendsprache, gleich den hebräischen oder was sonst man für die frühste sprache ausgeben wolle, um lange zeit, um viel jahrtausende von dem wirklichen ursprung der sprache oder der schöpfung des menschengeschlechts auf erden abstehn. wie kann über eine solche kluft

hinweg ein anfang der sprache ermessen werden? fällt die gesamte frage nicht in die reihe der unmöglichkeiten?

Dies bedenken scheint aber noch stärker einzuleuchten, wenn wir die lage und den gegenstand der naturforschung, die, wie eben erhellte, sich zur sprachforschung ähnlich verhält, erwägen. jene forscher streben in die geheimnisse des naturlebens zu dringen, d. h. die gesetze der zeugung und fortdauer der thiere, des keims und wachsthums der pflanzen zu ergründen. nie habe ich vernommen, dasz darüber hinaus ein seiner aufgabe sich bewuster anatom oder botaniker auch die erschaffung der thiere und pflanzen hätte wollen nachweisen; höchstens kann ihm klar werden, dasz einzelne thiere oder kräuter, um ihren zweck vollständig zu erreichen, an bestimmter stelle zuerst erscheinen und geschaffen sein musten. wenn sodann analogie obwaltet zwischen schöpfung und zeugung, sind doch beide als ein erster und zweiter act wesentlich verschieden von einander. die ewig sich erneuende fortzeugung erfolgt vermöge einer in das erschaffene wesen gelegten kraft, während die erste schöpfung durch eine auszerhalb dem erschafnen waltende macht geschah. die zeugung ruft, wie das schlagen des stahls an den stein schlafenden funken weckt, neues dasein hervor, dessen bedingung und gesetz bereits dem zeugenden anerschaffen war. hier aber scheint für den genau überlegenden in der that ein wendepunct zu liegen, wo naturforschung und sprachforschung wesentlich sich von einander scheiden, und alles folgende wird gerade davon abhängen, ob wir die sprache als ein erschafnes oder unerschafnes anerkennen. war sie erschaffen, so bleibt ihr erster ursprung unsern blicken eben so undurchdringbar als der des zuerst er-

schaffenen thiers oder baums. falls sie aber unerschaffen, d. h. nicht unmittelbar durch göttliche macht, sondern durch die freiheit des menschen selbst hervorgebracht wurde und gebildet, so mag sie nach diesem gesetz ermessen, ja von dem was uns ihre geschichte bis zum ältesten stamm hinauf ergibt, darf über jenen unerfüllten abgrund von jahrtausenden zurück geschritten und in gedanken auch am ufer ihres ursprungs gelandet werden. der sprachforscher braucht also nicht die hand abzulegen, sondern kann weiter gehn als der naturforscher, weil er ein menschliches, in unsrer geschichte und freiheit beruhendes, nicht plötzlich sondern stufenweise zu stande gebrachtes werk seiner betrachtung unterwirft, da im gegentheil alle erschafnen unfreien wesen gar keine geschichte kennen und bis auf heute beinahe noch eben so sich verhalten, wie sie aus des schöpfers hand hervor gegangen sind.

Hiermit ist im voraus freilich schon ausgesprochen, was ich als möglichen erfolg meiner ganzen angestellten untersuchung betrachtet wissen will; gleich wol müssen für sie eine reihe einzelner gründe in anschlag gebracht werden und es wird auszerdem nicht ungerathen sein, diesen erst noch voran gehn zu lassen, was zu gunsten eines unmittelbar von der gottheit ausgegangnen ursprungs der sprache könnte gesagt werden. weil nun ein solcher noch auf doppelte weise denkbar wäre, insofern nemlich gott die sprache den menschen anerschaffen oder erst nach der schöpfung selbst offenbart hätte; so soll zuvörderst von einer geschaffenen, dann von einer offenbarten sprache gehandelt und näher dargethan werden, warum keine von beiden anzunehmen sei.

Eine geschaffene, naturwüchsige menschensprache voraus zu setzen mahnt von der oberfläche her angesehn

aus ihrem innersten durch ihren mund geht keine stimme. aber jedem vollkommneren warmblutigen thier, vögeln wie säugenden, ist immer ein ganz besonderer laut eigen, mit welchem es seine empfindungen wechselsweise des behagens, der lust und des schmerzes, lockend oder scheuchend kund thun kann; einigen unter ihnen und zwar nicht den uns sonst verwandteren vierfüszigen thieren, sondern voraus dem gevögel wurde ein klangvoller, meistens anmutiger und herzerfreuender gesang zugetheilt. stehn alle thierlaute nicht der menschensprache zur seite? hat man doch heisere, rauhe, harte menschensprache dem gekrächze der raben, quaken der frösche, bellen der hunde und wiehern der rosse verglichen.

Diese thierische in ihrer äuszerung gleich der thiergestalt selbst manigfaltigste stimme ist aber sichtbar von natur in jedes thier geprägt und wird von ihm hervorgebracht ohne sie erlernt zu haben. laszt ein eben ausgeschloffenes vöglein dem nest entnommen von menschenhand aufgefüttert werden, es wird dennoch aller laute mächtig sein, die seinesgleichen, unter welchen es sich niemals befand, eigen sind. darum bleibt die jeder thierart angewiesene stimme immer einförmig und unveränderlich: ein hund bellt noch heute wie er zu anfang der schöpfung boll, und mit demselben tirelieren schwingt die lerche sich auf wie sie vor vielen tausend jahren that. das angeschaffene hat weil es angeschaffen ist unvertilgbaren charakter.

Alle thiere leben und handeln also nach einem in sie gelegten dunkeln trieb, der an sich gar keiner steigerung fähig von anfang schon seine natürliche, dem menschen manchmal unerreichbare vollkommenheit mit sich trug. das spinngewebe ist so zart und regelrecht

vom thierlein aus seinem leib gezogen und ausgespannt wie im laubblatt die selbstgewachsnen rippen. die biene wirkt ihre kunstmäszige sechseckenzelle ein wie das andre mal, ohne haarbreit je von dem ihr vorgeordneten muster und bauplan abzuweichen. dennoch wohnt den thieren mehr oder minder auszer dem in ihnen herschenden instinct der nothwendigkeit ein analogon von freiheit bei, die sie leise anfliegt, aus der sie unmittelbar wieder in ihre natur zurück treten. wenn bienen ausgeflogen sind um honigstof einzuholen und sich auf eine heide niederlassen, von welcher sie immer zu rechter zeit und sicher den heimweg nach ihrem stock nicht verfehlen; mag es einzelne unter dem schwarm geben, die sich ein paar hundert schritte abwärts verfliegen und in der irre zu grunde gehn: ihnen ist die kleine freiheit verderblich geworden. es gibt gelehrige thiere, die der mensch für seine zwecke abrichtet, und leicht ist wahrzunehmen, dasz je ausgebildeter jener kunsttrieb sich entfaltete, desto weniger solches abrichten von statten geht. die biene oder ameise wären für alle menschliche lehre unempfänglich, aber hund, pferd, rind, falke nehmen sie bis auf einen gewissen grad an und ergeben sich dem willen des menschen. alle jedoch, erliesze man sie dessen, würden gern in ihre natürliche ungezwungenheit zurück kehren und das angelernte vergessen. das ganze thierleben scheint eine nothwendigkeit, aus der zuckende richtungen oder blicke der freiheit sie nicht vermögen loszureiszen; entgehn wir freien menschen selbst zuletzt nicht dieser noth.

Die stimme mit welcher die thierwelt für alle einzelnen geschlechter einförmig und unabänderlich ausgestattet wurde, steht demnach in unmittelbarem gegensatz zur menschlichen sprache, die immer abänderlich ist,

unter den geschlechtern wechselt und stets erlernt werden musz. was der mensch nicht zu lernen braucht und alsobald in das leben tretend von selbst kann, das bei allen völkern sich gleich bleibende wimmern, weinen und stöhnen oder jede andern ausbrüche leiblicher empfindung, das allein könnte dem schrei der thierischen stimme mit recht an die seite gesetzt werden. das gehört aber auch zur menschensprache nicht, und läszt mit deren werkzeugen sich eben so wenig als der thierlaut genau ausdrücken, nicht einmal vollständig nachahmen.

Wir wollen dem für des naturlauts unverrückbarkeit beigebrachten fall einen andern für das unangeborensein der menschensprache gegenüber halten und einmal setzen, dasz auf einem schlachtfeld das neugeborne kind einer französischen oder russischen mutter aufgenommen und mitten in Deutschland erzogen würde; es wird nicht französisch, nicht russisch, sondern gleich allen andern kindern, unter welchen es erwächst, deutsch zu sprechen anheben. seine sprache war ihm nicht angeboren.

Dieselben gleichgearteten menschen, die heute uns geboren bald alle laute und eigenheiten unsrer jetzigen sprache sich erwerben, würden vor fünfhundert oder tausend jahren zur welt gebracht eben so leicht und unvermerkt in den besitz alles dessen gelangt sein, was unsrer vorfahren sprache von der heutigen unterscheidet. die besonderheit jeder einzelnen sprache ist also abhängig von dem raum und der zeit, in welcher die sie übenden geboren und erzogen werden, raum und zeit sind anlasz aller veränderungen der menschensprache, aus ihnen allein läszt sich die manigfaltigkeit und abweichung der einem quell entstammenden völker

begreifen. der heutige Tiroler und Friese werden einander gegenüber ihre rede zu verstehn mühe haben, obgleich ihre urväter näher zusammen gestanden, einem und demselben volksschlag angehört haben müssen. auch unter einander verstehenden, ungeschieden lebenden menschen pflegen je nach geschlecht und individuum dennoch eigenheiten und abstände der sprache einzutreten. die bald einen gröszeren umfang und vorrath von wörtern, bald armut oder mangel daran wahrnehmen lassen, so dasz ihnen insgesamt ihre sprache zwar als gemeinbesitzthum, zugleich aber einzelnen als besonders zuständige ausdrucksweise erscheinen musz, die von jener einförmigkeit thierischer stimmbegabung himmelweit fern ist.

Nein, die sprache ist dem menschen weder angeboren noch anerschaffen und in allen ihren leistungen wie erfolgen kann sie mit der thierstimme nicht gleichgesetzt werden; nur eins müssen beide mit einander einigermaszen gemein haben, die ihnen unterliegende nothwendig durch den erschaffenen leib bedingte grundlage.

Jeder laut geht hervor durch eine bewegung und erschütterung der luft, selbst jenes elementarische rauschen des wassers oder knistern des feuers war im gewaltsamen an einander schlagen der wellen, die ihren druck auf die luft übten, oder im verzehren der brennstoffe, welche die luft erregten, bedingt, dem thier wie dem menschen sind stimmwerkzeuge von natur eigen, mittelst welcher sie in manigfache weise eindrücke auf die luft bewirken können, deren unmittelbare folge ein regelrechter, gleichartig wirkender schall ist. das thier bringt damit einzelne ähnliche laute wie der mensch hervor, dieser vermag sie weit reicher und allseitiger zu

entfalten. das geordnete entfalten der laute heiszt uns gliedern, articulieren und die menschensprache erscheint eine gegliederte, womit das homerische beiwort der menschen οἱ μέροπες, μέροπες ἄνθρωποι oder βροτοί zusammentrift, von μείρομαι oder μερίζω, die ihre stimme theilenden, gliedernden. wesentlich hängt aber diese lautgliederung ab von dem aufrechten gang und stand der menschen[1], vermöge dessen sie die einzelnen laute ruhig und gemessen vernehmen lassen können, während die thiere zur erde gebückt sind:

pronaque quum spectent animalia caetera terram,
os homini sublime dedit caelumque tueri
jussit, et erectos ad sidera tollere vultus[2].

Die nothwendige reihe und das masz dieser laute und schälle ist natürlich bedingt wie die tonleiter in der musik oder die folge und abstufung der farben, ihrem gesetz kann nichts hinzu gethan werden. denn auszer den sieben grundfarben, die unendliche mischung dargeben, sind keine andern denkbar, und eben so wenig läszt sich den drei vocalen a i u, aus welchen e und o, samt allen übrigen diphthongen und deren verdichtung zur bloszen länge entspringen, das geringste zufügen, noch die ordnung der halbvocale und consonanten, die sich in zahlloser manigfaltigkeit der verbindungen erzeigen, dem grunde nach erweitern. diese urlaute sind uns angeboren, da sie durch organe unseres leibs bedingt entweder aus voller brust und kehle gestoszen und ge-

[1] selbst ἄνθρωπος, mannes gesicht oder aussehn habend weist nach dieser aufrechten stellung des antlitzes. der erste theil des wortes nimmt durch einflusz des P ein θ statt Δ an und gehört zu ἀνήρ ἀνδρός = skr. nṛi und nara, vir, homo. andere dachten an ἀνω ἀθρεῖν, aufwärts schauen. [vgl. Aufrecht in der zeitschr. 3, 240.]

[2] Ovid. met. 1, 84.

haucht, oder mit hilfe des gaumens, der zunge, zähne und lippen hervor gebracht werden. einige ihrer bedingungen sind auch so greif oder faszbar, dasz es nicht völlig mislingen konnte, sie durch künstliche mechanische vorrichtungen bis auf einen gewissen grad nachzuahmen und scheinbar darzustellen. da nun aber die leibesorgane mehrerer thierarten den menschlichen gleichen, so darf nicht befremden, dasz gerade unter den vögeln, deren sonstiger bau weiter als der säugethiere von uns absteht, die uns aber in aufrechter haltung des halses näher kommen, darum auch wollautige gesangstimmen haben, dasz vorzugsweise papageien, raben, stare, elstern, spechte[1] im stande sind menschliche wörter fast vollkommen zu erfassen und nachzusprechen. von den säugethieren dagegen vermag das kein einziges, zumal nicht die in andern stücken uns zum erschrecken ähnlichen affen, welche, obgleich sie uns manche gebärden abzusehn suchen, nie darauf verfallen unsere sprache nachzuäffen. man sollte denken, den affenarten, welche aufrecht zu gehn lernen, müste es gelingen vocale, zungen und zahnlaute zu erreichen, wenn ihnen auch lippenlaute, weil ihre zähne blecken, unmöglich fielen: aber keine spur, dasz sie sich sprechens unterfangen.

Johannes Müller hat uns neulich die kehlen einiger singvögel scharf untersucht und darin nachgewiesen was ihren gesang hebe und zeuge. ich weisz nicht, ob es möglich wäre, dasz die zergliederung auch in den ausgebildeten kehlen menschlicher sänger eindrücke ge-

[1] der specht (wörtlich der spähende, weissagende vogel) hiesz darum μέροψ, gleich dem menschen, und in altrömischer wie in altdeutscher sage verweben sich Picus und Bienenwolf mit heldengeschlechtern. bemerkenswerth scheint, dasz papageien und raben auch die höhe des menschenalters erlangen.

wahrte, die eine grosze entwickelung der gesangsfähigkeit verkündigten; oder um noch stärkeres zu fragen, ob es dem anatom gelänge, in den sprachorganen solcher völker, die entschieden harter gutturale pflegen oder wie die Slaven schwere zischlautverbindungen eingeübt haben, äuszere spuren davon aufzuweisen. wäre das der fall, so würde ich nicht abgeneigt sein, weil solche eigenthümlichkeiten sich vererben können, wie einzelne gebärden und schulterdrehungen unbewust vom vater auf den sohn übergehn oder geschwister häufig dieselbe anlage zum gesang empfangen haben[1], ich würde also geneigt sein, schon in den kinderkehlen einzelner völker eingeprägte anlage für die aussprache eigner lautbestimmungen vorhanden zu glauben, so dasz jenem in Deutschland zur welt gekommenen Russen oder Franzosenkind immer noch einige unserer laute schwer gefallen wären. dies ergäbe das gegenstück zur thierischen beschränkung der nothwendigkeit durch die freiheit, insofern hier umgekehrt die menschliche sprachfreiheit durch einen zug der nothwendigkeit beeinträchtigt schiene, den sie doch leicht überwindet. die anatomie wird noch lange zu lernen haben, ehe sie die sprachwerkzeuge eines auf der ebene eingewohnten Norddeutschen von denen eines süddeutschen alpenhirten unterscheidet. unserm hauptergebnis aber, dasz die menschliche sprache unangeboren sei, wird nichts dadurch benommen. die natürliche lautgrundlage, deren sie gleich der thierischen stimme bedarf und die sie voraus setzt, wie unsere seele den menschlichen schädelbau, ist nichts als das instrument, auf dem die sprache gespielt wird, und dies spiel erzeigt sich beim menschen in einer manigfaltigkeit, die den unveränderbaren thierlauten völlig entgegen steht.

[1] man nimmt selbst wahr, dasz geschwister ähnlich niesen.

den physiologen wird doch mehr das instrument selbst, den philologen das spiel darauf anziehen.

Nun aber wurde auszer der eben verworfnen angeborenheit der sprache noch eine andre annahme als denkbar voraus gesetzt, dasz sie von des menschengeschlechts urheber diesem zwar nicht unmittelbar im act der schöpfung, vielmehr nach der schöpfung mitgetheilt, durch das menschliche gedächtnis aufgefaszt und dann von geschlecht zu geschlecht fortgepflanzt und ausgearbeitet worden sei, mit allem wechsel und aller verderbnis, die sie unter des menschen hand habe erfahren müssen. jene göttliche mittheilung oder offenbarung der sprache, vergleichbar der eines göttlichen gesetzes, müste dennoch früher als dieses fast alsogleich nach vollbrachter schöpfung des ersten menschenpaares eingetreten sein, weil ein solches der sprache beinahe keinen augenblick hätte entrathen können, und mit der schöpferischen allmacht unvereinbar schiene, dasz ihrer fertigen, edelsten creatur im anfang gebrochen habe was ihr später zu theil werden sollte.

Diese auffassung würde von der ihr im verfolg entgegen zu setzenden eines menschlichen ursprungs der sprache sich zwar in der grundlage wesentlich, in bezug auf die fortpflanzung einer so kostbaren gabe scheinbar wenig unterscheiden. eine solche fortpflanzung erfolgt von geschlecht auf geschlecht, da niemals alle menschen zugleich sterben, wie sie allmälich zur welt kommen, folglich die überlebenden den nachlebenden hinterlassen was sie selbst von ihren vorfahren empfangen hatten, gleichviel ob eine von gott offenbarte oder von den ersten menschen frei erworbene sprache weiter getragen worden sei. die offenbarung brauchte nur einmal erfolgt zu sein, voraus gesetzt, dasz sie nie wieder

ganz erloschen war, sondern ihren schein immer, wenn auch schwächer von sich geworfen hätte; die menschenerfindung könnte sich öfter wiederholt haben. im fall der offenbarten sprache wäre gleichwol anzunehmen, dasz die ersten ihr näher gestandnen menschen gegenüber den späteren von der göttlichen macht bevorzugt, diese nachtheiliger gestellt worden seien, was gottes gerechtigkeit widerstritte.

Die vorstellung einer offenbarten sprache, dünkt mich, musz denen willkommen sein, welche in den anfang aller menschlichen geschichte einen stand paradisischer unschuld setzen, hernach durch den sündenfall die edelsten gaben und fähigkeiten des menschen zerrüttet werden, folglich auch die gottähnliche sprache von ihrem gipfel herabsinken und dann nur geschwächt den nachkommen zustehn lassen mögen. solch eine ansicht könnte zusagen, und halt gewinnen, weil die ganze geschichte der sprache, so weit wir in sie gedrungen sind, in der that ihren abfall von einer vollendeten gestalt zur minder vollkomnen zu verrathen, somit anzudeuten scheint, dasz auch für die sprache wie für die gesamte menschliche natur eine herstellung und erlösung eintreten und nach dem verlornen zustand anfänglicher vollkommenheit und reinheit auf geistigem wege allmälich müsse zurück gekehrt werden.

Dennoch finden wir diese deutung schon im widerspruch mit den urkunden unsrer heiligen schrift, welche einer statt gefundnen göttlichen offenbarung der sprache an den menschen nirgends gedenkt, vielmehr das von ihr selbst unerklärt gelassene dasein der sprache voraus setzt und deren verwirrung erst lange zeit nach dem sündenfall eintreten läszt. sinnreich und ergreifend wird aller sprachenzwiespalt aus einem gewaltsamen frevel

übermütiger menschen abgeleitet, die den himmel stürmenden titanen des griechischen mythus ähnlich der gottheit durch einen thörichten thurmbau näher zu rücken wähnten, und darüber die einfachheit ihrer sprache verloren, welche sie nun von dieser stätte verworren in alle theile des erdbodens austrugen. neulich hat ein gewandter maler in reicher composition diese vielleicht aus bloszem misverstand des hebräischen wortes babal, welches vermischen, mengen bezeichnet, erwachsne sage veranschaulichen wollen. hier aber kann die kunst nur spielen, nichts ausrichten; da die zersplitterung der sprache über die ganze erde und ihre endlose mannigfaltigkeit[1] höchst naturgemäsz war, und die grösten zwecke der menschheit förderte, darf sie blosz wolthätig und nothwendig, keineswegs verwirrend heiszen und ist sicher auf ganz andere weise erfolgt, als uns diese einem lauten einspruch der sprachgeschichte überhaupt ausgesetzte erzählung zu verstehn gibt.

Hier reicht meine untersuchung an einen theologischen standpunct, vor dem sie nicht zu erschrecken braucht.

Unter offenbarung denken wir uns eine kundthuung oder manifestation, die Griechen nennen sie ἀποκάλυψις enthüllung, die Römer revelatio entschleierung, und diese wörter alle laufen auf denselben begrif hinaus, das offen gemachte war vorher verschlossen, das enthüllte bedeckt oder verschleiert. niemand kann bezweifeln, dasz eine schaffende urkraft unablässig auch ihr werk fortdurchdringe und forterhalte: das wunder der weltdauer kommt

[1] die auch im mittelalter angenommen wurde, das sich oft auf 72 sprachen einschränkt, Parz. 736, 28 von einem heidnischen könig:

er hete fünf und zweinzec her
der neheinez sandern rede vernam.

dem ihrer schöpfung vollkommen gleich. diese sich unausgesetzt kundthuende göttliche kraft ist keinem als dem verstehenden eine kennbare offenbarung. da sie die gesamte natur durchdringt und in allen dingen enthalten ist, liegt sie zugleich offen und verborgen da und mag blosz durch das mittel der dinge selbst erforscht werden. denn sie ist in allen dingen, eben darum nicht auszer ihnen. unverstanden redet die natur, so lange der suchende nicht auf ihre spur kommt und sie ihm verständlich wird.

Des alterthums kindliche vorstellung pflegte aber unmittelbaren verkehr der gottheit mit den menschen anzunehmen, dessen wirklichkeit unsrer vernunft unbegreiflich und so unzulässig ist wie die der meisten andern mythen. denn hat die gottheit anfangs sichtbar sich gezeigt, warum sollte sie je nachher aufgehört haben es zu thun? dies ist dem ihr nothwendig beiwohnenden begrif der stätigkeit entgegen; das unerschaffene kann keine geschichte haben, musz sich ewig gleich bleiben. man fühlt sich in einen kreis von widersprüchen gebannt, die wenn überall vortretend kaum irgend greller obwalten, als wo ein göttlicher ursprung der sprache behauptet werden soll.

Der griechischen poesie verursacht es nicht den mindesten anstosz, dasz die götter erscheinen und in der sprache des landes reden, so wenig es heute auf unsrer schaubühne befremdet, dasz helden und männer aller länder sich einstimmig in der jetzigen sprache ausdrücken, da sie nur durch das mittel unsrer eignen vorstellungen uns anschaubar werden. es musz aber ein grund vorhanden gewesen sein, warum bei Homer wie noch bei den tragikern zwar Apollo, Hermes, Athene

und andere götter und göttinnen, niemals Zeus selbst[1] den menschen leiblich erscheinend und redend vorgeführt wird; gleichsam stellen sich jene nur als seine boten dar, die den höchsten, an sich unaussprechlichen willen in menschenworte zu kleiden und zu fassen beauftragt sind, und in der wuchernden vielgötterei treten lauter unterwürfige handlanger des höchsten wesens auf, dessen eigenschaften sie vorstellen, dessen geheisz sie verkünden und ausrichten, wie die catholischen engel oder heiligen.

Im alten testament erscheint gott gleich von anfang leibhaft und redet mit Adam Eva Noah Ahraham Moses [Josua], die seine rede von selbst verstehend und darauf antwortend dargestellt werden; nirgends ist gesagt, dasz eine erste eröfnung dieses verständnisses eingetreten oder nöthig befunden worden sei. doch schon zu Moses zeit beginnt sich gott ferner zu stellen, nur auf dem berg zu erscheinen, nur in der wolke zu reden, aus welcher donner und blitz fahren, ganz wie der donnernde Zeus im gewölk sich erzeigt. allmälich pflegt er gar nicht mehr selbst, sondern der engel des herrn aufzutreten, und bereits Moses gegenüber wird es einigemal zweifelhaft, ob ihm des herrn stimme oder die seines boten erschollen sei. später* redet gott zu den men-

[1] diesen anstand verletzt also Plautus, wenn er im Amphitruo den Jupiter erscheinen und reden läszt. [Aeschylos und Sophokles werden es auch in ihren verlornen stücken anders damit gehalten haben.] auch in der edda, als die drei götter Odinn, Hoenir, Loki auf erden wandeln, führt nur Loki die rede, die andern schweigen. [im Nalas erscheinen und reden götter. — Joh. 1, 18 θεὸν οὐδεὶς ἑώρακεν πώποτε.]

* der herr redet mit satan. Hiob 1, 6—12. 2, 1—6. Hiob und der herr reden mit einander 39, 31. 33. 42, 1—8. der herr antwortet dem Hiob aus einem wetter. Hiob 38, 1. 40, 1. und sihe, das wort des herrn kam zu im und sprach zu im. 1 kön. 19, 9. zu Abram geschah das wort des herrn im gesicht. 1 Mos. 15, 1.

schen nur durch der weissagen und engel mund, deren höhere gabe von einem näheren verhältnis zu gott abgeleitet werden könnte, wie die ausschüttung des geistes in der apostelgeschichte (10, 44—46) unmittelbar die zungen löst[1], daraus läszt sich aber der einfache ursprung der längst bestandnen menschensprache nicht begreifen, wenn man auch jenem ausgusz über das bild hinaus die wirkliche eingebung menschlicher sprachpraxis beilegen will. das buch, von welchem wir den namen der apocalypsis entnehmen, wurde zu Johannes durch einen engel des herrn gesandt, und der apostel Paulus redet von zungen der menschen und engel, wie Plato den verkehr (ὁμιλία καὶ διάλεκτος) zwischen göttern und menschen durch daemone vermitteln läszt, aber alle vorstellung von daemonen und engeln ist in der natur der welt unbezeugt, in der geschichte, so glaublich man sie zu machen gestrebt hat, unbegründet.

Wie soll unsre vernunft der menschlichen sprache ursprung aus göttlicher offenbarung, die doch nothwendig keine heftige inspiration, sondern einfache rede gewesen und mittelst dieser rede weiter getragen sein müste, fassen? waren die ersten menschen fähig gottes worte zu vernehmen, d. h. zu verstehn, so scheint es unvonnöthen ihnen eine sprache zu enthüllen, die als jenes verständnisses bedingung sie bereits besitzen musten. vorhin jedoch haben wir erwiesen, dasz ihnen keine sprache anerschaffen war, folglich dasz sie gar nicht im bereich eines mittels standen, von welchem das verstehn, dessen sie unerläszlich bedurften, abhieng. die natur des menschen war zur zeit der schöpfung nicht anders als sie heute ist, sie vermochte lediglich durch ihre sinne

[1] auch die sage meldet, dasz die gabe des dichtens plötzlich über einen gekommen sei.

und die vernunft, womit sie ausgestattet war, eindrücke zu empfangen, die auf anderm wege ihr gar nicht zu theil werden konnten. nirgends steigt eine lehre so gewaltsam auf die menschen herab, dasz ihr nicht ein inneres lernen entgegenkommen müste.

Noch mehr, sollen und dürfen wir uns gott redend denken? redete, d. h. spräche er menschliche worte, so müsten wir ihm auch menschlichen leib, zumal alle jene leiblichen organe beilegen, von welchen gegliederte rede abhängt. es scheint mir aber gleich widersinnig einen vollkomnen menschenleib ohne eins seiner gliedmasze, z. b. ohne zähne, als die gottheit mit zähnen, folglich essend sich vorzustellen, da die zähne nach unsrer weisen natur zwar mit beholfen sind zum sprechen, hauptsächlich aber zum zermalmen der speise dienen. auf solche weise würde es ganz unmöglich sein, eins der andern glieder des leibs deren innerer und äuszerer einklang unsre höchste bewunderung rege macht, irgend der schaffenden gottheit abzusprechen oder beizulegen[1].

Wenn aber überhaupt ein leib, mindestens ein menschlicher der gottheit gar nicht anstände, wie könnte rede oder bedürfnis der rede ihr beigemessen werden? was sie nur denkt, das will sie auch, was sie will hat sie ohne aufenthalt und zweifel mit mehr als blitzesschnelle vollführt. wozu hätte sie sich eines boten bedient um langsamer auszurichten, was sie mit einem wink, wenn es ihrer weisheit gefällig gewesen wäre, vollbrächte? rinnen in dem göttlichen sein alle jene von uns gesondert betrachteten eigenschaften, allmacht, urplan und ausführung nicht zusammen? ohne ihres gleichen, doch uneinsam waltet die gottheit allenthalben

[1] mit recht Wolfram im Parz. 119, 20 von gott: der antlitzes sich bewac (nicht gebildet war) nâch menschen antlitze.

in der unendlichen natur fülle, des behelfs einer der menschlichen auch nur von ferne vergleichbaren sprache bedarf sie nicht, wie ihre gedanken nicht den weg des menschendenkens gehn.

Dasz an eines menschen ohr jemals, so lange die welt steht, ein unmittelbares wort gottes gedrungen sei, kann alle menschliche geschichte mit nichts erweisen. seine verlautbarung würde keiner menschensprache nahe kommen, eine harmonie der sphären sein*. wo, dasz gott redete, aufgezeichnet ist, hat der geschichtschreiber einer sage gefolgt, die für die dunkelheit der vorzeit eines gangbaren bildes sich bediente; wer wollte buchstäblich nehmen, wenn gesagt ist, dasz gott das gesetz mit seinem finger in die hernach von Moses zerbrochne steintafel geschrieben habe? die heilige schrift die wir gottes wort nennen, ist uns ehrwürdig durch ihr hohes alterthum und die edle einfachheit ihrer darstellung; allein wer sie auch zuerst abfaszte stand von dem anfang der schöpfung bereits allzuweit ab, als dasz er anderes als bild und sage davon mit zu theilen vermocht hätte. was von der heidnischen sage jeder allenthalben zugesteht, musz er auch für die des A. T. einzuräumen wahrheitliebend und besonnen sein. Arnobius eifert mit schlagenden gründen wider das heidenthum, ohne zu ahnen, dasz gar manche derselben auch gegen die neue lehre gebraucht werden können.

Das verhältnis gottes zur natur beruht auf gleich festen, unerschütterbaren gesetzen wie die bande der natur unter sich, und da diese ihr geheimnis und wunder nur in sich selbst, nicht auszer sich tragen, so musz jedes nicht natürliche mittel von ihnen ausgeschieden

* das volk hält die himmlische stimme für donner. Joh. 12, 29. vgl. apoc. 8, 5. 11, 19. 16, 18. — 10, 3. 4. 14, 2. 19, 6.

sein. ein geheimnis, bei dem es unnatürlich hergienge, gibt es nicht[1].

Es mag auffallen, dasz weder das griechische noch indische alterthum versucht haben die frage nach dem ursprung und der manigfaltigkeit menschlicher zungen zu stellen und darauf zu antworten. die heilige schrift strebte wenigstens das eine der beiden räthsel, das der manigfaltigkeit durch den thurm von Babel zu lösen. ich kenne nur noch eine arme estnische volkssage, welche dieser lösung sich etwa an die seite stellen liesze. der alte gott, als den menschen ihr erster wohnsitz zu eng geworden war, beschlosz sie über den ganzen erdboden auszubreiten, jedem volk auch eine besondere sprache zu ertheilen. in dieser absicht stellte er einen kessel mit wasser zum feuer, liesz die einzelnen stämme der reihe nach heran treten und für sich die töne entnehmen, welche das eingesperrte und gequälte wasser singend hervor brachte. hier also wurde den menschen wo nicht ihre erste, wenigstens eine neue sprache durch die naturlaute eines elements überwiesen.

Ich habe, worauf mein ziel sich beschränkte, dar-

[1] Lessing (sämtl. schriften 10, 4. 5) bemerkt zu einem aufsatze Jerusalems über den ursprung der sprache, dasz die sprache durch ein wunder dem ersten menschen nicht mitgetheilt sein könne, darum der mensch sie noch nicht erfunden zu haben brauche; im umgang mit höheren geschöpfen, durch herablassung des schöpfers selbst könne sie gelernt worden sein, was einige wahrscheinlichkeit gewinne dadurch, dasz die menschliche erfindung lange jahrhunderte gedauert haben müsse und des schöpfers güte den armen doch nicht so lange die sprache entzogen haben werde. alle solche voraussetzungen sind sichtbar ohne boden. — [der christlichen ansicht nach offenbarte gott nicht nur zu anfang die sprache, sondern er gibt auch fortwährend redenden menschen ihre worte ein. es ist ganz gewöhnlich zu sagen: das wort liesz dich gott sprechen, gab dir gott ein. schon im Beovulf 3686 þe þâ vordcviðas vittig dryhten on sefan sende.]

gethan, dasz die menschensprache so wenig eine unmittelbar geoffenbarte sein könne, als sie eine anerschafne war; eine angeborne sprache hätte die menschen zu thieren gemacht, eine geoffenbarte in ihnen götter voraus gesetzt. es bleibt nichts übrig, als dasz sie eine menschliche, mit voller freiheit ihrem ursprung und fortschritt nach von uns selbst erworbne sein müsse*: nichts anders kann sie sein, sie ist unsre geschichte, unsre erbschaft.

Das was wir sind, wodurch wir uns von allen thieren unterscheiden, führt im sanskrit den bedeutsamen ehrwürdigen namen manudscha, welcher auch vorzugsweise in unsrer deutschen sprache bis auf heute sich erhalten hat, goth. manniska, ahd. mannisco, nhd. mensch und so durch alle mundarten; dies wort darf zwar mit gutem grund auf einen mythischen ahnen Manna, Mannus, den schon Tacitus bezeugt, auf einen indischen könig Manas zurückgeleitet werden, dessen wurzel man d. h. denken ist und wozu unmittelbar auch manas, μένος, mensch fallen.

Der mensch heiszt nicht nur so, weil er denkt, sondern ist auch mensch weil er denkt und spricht, weil er denkt, dieser engste zusammenhang zwischen seinem vermögen zu denken und zu reden bezeichnet und verbürgt uns seiner sprache grund und ursprung. vorhin sahen wir griechische benennungen des menschen hergenommen von seinem empor gerichteten antlitz, von seiner gegliederten rede, hier ist er noch treffender nach seinem denken genannt. die thiere reden nicht, weil sie nicht denken, und heiszen darum die unredenden, altn. ômælandi [dän. de umælende], wie die unvernünf-

* sprachen geistige schöpfungen der menschheit. Humb. Kosmus 1, 383.

tigen, bruta, mutae bestiae, mutum et turpe pecus[1], das gr. ἄλογος drückt zugleich aus unredend und undenkend[2]. das kind beginnt zu reden, wie es anhebt zu denken, und die rede wächst ihm wie ihm der gedanke wächst, beides nicht additiv, sondern multiplicativ. menschen mit den tiefsten gedanken, weltweise, dichter, redner haben auch die gröste sprachgewalt; die kraft der sprache bildet völker und hält sie zusammen, ohne solches band würden sie sich versprengen, der gedankenreichthum bei jedem volk ist es hauptsächlich was seine weltherschaft festigt.

Die sprache erscheint also eine fortschreitende arbeit, ein werk, eine zugleich rasche und langsame errungenschaft der menschen, die sie der freien entfaltung ihres denkens verdanken, wodurch sie zugleich getrennt und geeint werden. alles was die menschen sind haben sie gott, alles was sie überhaupt erringen in gutem und bösem haben sie sich selbst zu danken. die inspiration des propheten ist nur ein bild für den in ihm erweckten

[1] thet dumbe diar. Richthofen 206. daz unsprechende vihe. warnung 2704. tier ungewizzen. Erek 5843. [der lewe zeict im unsprechenden gruoz. Iw. 3870. zwei tumme tiere. erlösung 2908. esil, wizzun wir thaz, theist fihu filu dumbaz. Otfrid IV, 5, 7. ags. stunte nytenu, bruta animalia. Thorpe anal. 114. Neugriechen ist τὸ ἄλογον immer das pferd, gerade eins der klügsten thiere. auch völker heiszen stumme, unredende. GDS. 780. — unredende kinder soll man nicht einander küssen lassen, weil sie sonst nicht reden lernen. Rääf. 129. 132. (abergl. 831 scheint misverstand.) stumme lernen denken, aber nicht reden. einer der schon redete kann plötzlich erstummen, die sprache verlieren, wie Zacharias. ward ald gumo spâca bilósid. Hel. 5, 21. bei Balders tod entfällt den asen die sprache, und als sie's zuerst wieder versuchen, folgt weinen. Sn. 65. den maikäfer suchen, der ihm die sprache entführt hätte. Weise erznarr. 143. nachgraben, ob die sprache wäre in ein hamsterloch gekrochen. das. 145.]

[2] ratio ist auch oratio, wie λόγος wort und vernunft. [rationis et orationis expertes. Cic. de off. 1. 16, 50.]

und wachen gedanken. weil aber die sprache anfangs unvollkommen war und ihr werth erst steigt, kann sie nicht von gott, der vollendetes prägt, ausgegangen sein.

Der schöpfer hat die seele, d. h. die kraft zu denken, er hat die sprachwerkzeuge, d. h. die kraft zu reden in uns beides als kostbare gaben gelegt, aber wir denken erst indem wir jenes vermögen üben, wir sprechen erst indem wir die sprache lernen. gedanke wie sprache sind unser eigenthum, auf beiden beruht unsrer natur sich aufwindende freiheit, das sentire quae velis et quae sentias dicere, ohne sie würden wir thieren gleich barer nothwendigkeit hingegeben sein und mit ihr sind wir empor geklommen.

Diese sprache, dies denken steht aber nicht abgesondert da für einzelne menschen, sondern alle sprachen sind eine in die geschichte gegangene gemeinschaft und knüpfen die welt aneinander. ihre manigfaltigkeit eben ist bestimmt, den ideengang zu vervielfachen und zu beleben. von dem sich ewig erneuernden, wechselnden menschengeschlecht wird der köstliche allen dargebotne erwerb auf die nachkommen übertragen und vererbt, ein gut das die nachwelt zu erhalten, zu verwalten und zu mehren angewiesen ist. denn hier greifen lernen und lehre unmittelbar und unvermerkt in einander. die ersten worte vernimmt der säugling an der mutterbrust von der weichen und sanften mutterstimme ihm entgegen gesprochen, und sie schmiegen sich fest in sein reines gedächtnis, bevor er noch der eignen sprechorgane mächtig geworden ist, darum heiszt sie die muttersprache und so erfüllt sich mit den jahren in schnell erweiterten kreisen ihr umfang. sie allein vermittelt uns am unvertilgbarsten heimat und vaterland, und was von den einzelnen geschlechtern und stämmen, die gleiche

spracheigenheit eingedrückt empfangen, musz weiterhin von der ganzen menschlichen gesellschaft gelten. ohne sprache, dichtkunst und die zur rechten zeit sich eingestellten erfindungen der schrift und des bücherdrucks würde die beste kraft der menschheit sich verzehrt haben und ermattet sein. auch die schrift hat man die götter den menschen weisen lassen wollen; doch ihr überzeugend menschlicher ursprung, ihre wachsende vollkommenheit musz, wenn es nöthig wäre, den erweis des menschlichen ursprungs der sprache bestätigen und vollführen.

Herodot meldet uns, Psammetich der Aegypter könig um zu versuchen, welches volk und welche sprache zuerst erschaffen worden sei, habe zwei neugeborne kinder einem hirten einsam aufzuziehen gegeben, mit befehl kein wort vor ihren ohren auszusprechen und zu achten, welchen laut sie nun hervor bringen würden. nach einiger zeit verlauf, als der hirt diesen kindern sich genähert, hätten sie mit ausgestreckten händen βεκός ausgerufen, und dann öfter dasselbe wort in gegenwart des königs wiederholt. auf angestellte erkundigung sei man aber gewahr worden, dasz die Phryger das brot βεκός nennen und habe dadurch die überzeugung gewonnen, dasz die Phryger das älteste volk der erde seien[1].

Wäre es möglich, denn die ganze erzählung klingt höchst abenteuerlich, einen solchen versuch jemals anzustellen und in der weise durchzuführen, dasz man neugeborne kinder grausam auf eine abgelegne insel aussetzen und von stummen dienern groszziehen liesze; so würde man zwar keine worte der ältesten menschen-

[1] Herod. 2, 2. vgl. fragm. histor. graecor. 1, 22. 23. — [einsam erzogen kind spricht hebräisch! Megenberg 15, 6.]

sprache, die ihnen ja durchaus nicht angeboren sein konnte, vernehmen, wol aber hätten diese elenden dem menschlichen erbtheil entrissenen geschöpfe mit ihrem erwachenden denkvermögen von vornen an beginnend gleich den ersterschafnen menschen eine sprache sich zu erfinden, und falls ihre abgeschiedenheit andauern könnte, auf ihre nachkommen fortzupflanzen. nur um so theuern preis, was jedoch nie so lange die erde dauern wird, zur ausführung gelangen dürfte, weil sich zahllose hindernisse entgegen stemmen müsten, könnte die sprachforschung unmittelbare bestätigung dessen entnehmen, was sie aus andern gründen zu folgern berechtigt ist.

Ich nähere mich meiner eigentlichen aufgabe oder doch dem für die meisten meiner zuhörer anziehendsten theil derselben, welcher auf die frage antwort geben soll, wie man sich zu denken habe, dasz die ersten menschen die erfindung ihrer sprache bewerkstelligten.

Vorausgeschickt werden musz jedoch in aller kürze, ob, ganz abgesehn von dem hier noch bei seite bleibenden problem, in wie fern die grundverschiedenen sprachen der erde auf eine erste bildung oder nur auf mehrere bildungen sich zurück führen lassen, ob man auch da, wo eine einzige, weit verbreitete und hernach in viele äste zerfallende ursprache vorliegt, nur ein menschenpaar oder mehr als eins anzusetzen habe, durch welches sie hervorgebracht und fortgepflanzt worden sei?

Das ist anzunehmen, dasz mann und weib zusammen, vollwüchsig und zeugungsfähig erschaffen wurden, denn nicht setzt der vogel das ei, die pflanze den samen, sondern das ei den vogel voraus, das korn die pflanze; kind, ei, samenkorn sind erzeugnisse, folglich unerschaffen: der erste mensch war also nie kind, doch das

erste kind hatte einen vater. wer wollte glauben, dasz aus unerschaffenen sich aneinander fügenden, in einander wirkenden elementen eine geheime stumme gewalt sich allmälich zum leben hinauf gerungen hätte? das belebende band, mit dessen schwinden jedesmal das leben in die todten stoffe zurück weicht, musz doch vorausgegangen sein. aber dasz von jedem thier, von jedem kraut nur ein paar, nicht mehrere neben einander erschaffen worden, dasz alle gräser in ihrer fülle aus eines halmes wucher vervielfacht seien, hat wenig für, mehr gegen sich. die ein paar entstehn lassende schöpferische kraft konnte unbehindert auch mehrere zusammen schaffen, wie sie schon im ersten paar das gleichartige zweimal hervor zu bringen genöthigt war. gegen den ausgang der gesamten thiermenge aus einem paar jeder gattung hat man auch nicht ohne schein den gesellschaftstrieb der ameisen und bienen eingewandt, der ihnen musz angeboren gewesen, nicht allmälich entwickelt sein, folglich nicht erst auf die entwickelte menge gewartet haben kann. auf den menschen und die sprache angewandt ist es sogar wahrscheinlich, dasz mehr als ein paar erschaffen wurde, schon aus dem natürlichen grunde, weil die erste mutter möglicherweise lauter söhne oder lauter töchter hätte gebären können, wodurch alle forterzeugung gehindert worden wäre, noch mehr aus dem sittlichen, um vermischung von geschwistern, wovor die natur ein grauen hat, zu verhüten. die bibel geht darüber still hinweg, dasz Adams und Evas, wenn sie allein standen, kinder unter einander sich begatten musten[1].

[1] Göthe läszt die ersten menschenpaare zu dutzenden hervor gehn. Eckermann 2, 21. — [man fing an sich zu überzeugen, dasz das menschengeschlecht überall unter gewissen naturbedingungen habe entstehen

Auch erklärt sich der sprache ursprung viel leichter, wenn alsogleich zwei oder drei menschenpaare, und bald ihre kinder, an ihr bildeten, so dasz alle sprachverhältnisse auf der stelle sich zahlreich vervielfachen konnten; die einheit der entspringenden regel läuft darunter keine gefahr, weil auch schon bei einem menschenpaar zwei individuen, mann und frau, die sprache erfinden musten und hernach ihre kinder sich mit daran betheiligten. man kann den frauen, die nach einigen generationen, zumal wenn mehrere paare stattfanden, gern ihre eigne, von den männern in manchem gesonderte sitte und stellung einnahmen, sogar eigenheiten der mundart für ausprägung der ihnen vorzugsweise geläufigen begriffe von frühe beilegen, wie sie uns am bestimmtesten das prakrit gegenüber dem sanskrit bezeugt. aber in allen alten sprachen sehen wir männliche und weibliche flexionen neben einander unterschieden, was auf keinen fall ohne einflusz des frauengeschlechts auf die sprachgestaltung selbst kann geschehen sein.

Aus dem verhältnis der sprachen nun, welches uns über die verwandtschaft der einzelnen völker sichereren aufschlusz darreicht, als alle urkunden der geschichte es vermögen, läszt sich auf den urzustand der menschen im zeitraum der schöpfung und auf die unter ihnen erfolgte sprachbildung zurück schlieszen. dem menschlichen geist macht es erhebende freude über die greifbaren beweismittel hinaus das zu ahnen, was er blosz

können und dasz jede so entstehende menschenrace sich ihre sprache nach organischen gesetzen habe erfinden können. Göthe 31, 190. — ob das menschengeschlecht von einem paar abstamme? A. v. Humboldt im Kosmus 1, 381, 382. Martius ureinw. Brasil. s. 81 nimmt an, dasz die menschheit von America nirgends anders als in diesem welttheile selbst entsprang.]

in der vernunft empfinden und erschlieszen kann, wofür noch die äuszere bewahrheitung mangelt. wir gewahren in den sprachen, deren denkmäler aus einem hohen alterthum bis zu uns gelangt sind, zwei verschiedne und abweichende richtungen, aus welchen eine dritte ihnen vorher gegangene, aber hinter dem bereich unsrer zeugnisse liegende nothwendig gefolgert werden musz.

Den alten sprachtypus stellen uns sanskrit und zend, groszentheils auch noch die griechische und lateinische zunge vor; er zeigt eine reiche, wolgefällige, bewundernswerthe vollendung der form, in welcher sich alle sinnlichen und geistigen bestandtheile lebensvoll durchdrungen haben. in den fortsetzungen und späteren erscheinungen derselben sprachen, wie den dialecten des heutigen Indiens, im Persischen, Neugriechischen und Romanischen ist die innere kraft und gelenkigkeit der flexion meistens aufgegeben und gestört, zum theil durch äuszere mittel und behelfe wieder eingebracht. auch in unsrer deutschen sprache, deren bald schwach rieselnde, bald mächtig ausströmende quellen sich durch lange zeiten hin verfolgen und in die wagschale legen lassen, ist dasselbe herabsinken vom früheren höhepunct grösserer formvollkommenheit unverkennbar und dieselben wege des ersatzes werden eingeschlagen. halten wir die gothische sprache des vierten jh. gegen unsre heutige, dort ist wollaut und schöne behendigkeit, hier, auf kosten jener, vielfach gesteigerte ausbildung der rede. überall erscheint die alte gewalt der sprache in dem masze gemindert als etwas anderes an die stelle der alten gaben und mittel getreten ist, dessen vortheile auch nicht dürfen unterschätzt werden.

Beide richtungen stehn einander keineswegs schrof entgegen und alle sprachen erzeigen sich auf manig-

falten, ähnlichen aber ungleichen stufen. die formabnahme hat z. b. auch im gothischen oder lateinischen bereits begonnen und für die eine wie die andere sprache darf man eine vorausgegangene ältere und reichere gestalt ansetzen, die sich zu ihrem classischen bestand verhält wie dieser etwa zum neuhochdeutschen oder französischen. anders und allgemein ausgedrückt, ein erreichter gipfel der förmlichen vollendung alter sprache läszt sich historisch gar nicht feststellen, so wenig die ihr entgegengesetzte geistige sprachausbildung heute auch schon zum abschlusz gelangt ist, sie wird es noch unabsehbar lange zeit nicht sein. es ist zulässig selbst dem sanskrit voraus noch einen älteren sprachstand zu behaupten, in welcher die fülle seiner natur und anlage wiederum reiner ausgeprägt gewesen wäre, die geschichtlich wir gar nicht mehr erreichen, aus dem verhalt der vedischen sprachform zur späteren ahnen.

Ein verderblicher fehler würde aber sein, und er scheint mir gerade bei untersuchung der ursprache hemmend eingewirkt zu haben, jene vollendung der form noch höher und bis in ein vermeintes paradis zurück zu verlegen. vielmehr ergibt der beiden letztern sprachperioden aneinander halten, dasz wie an den platz der flexion eine auflösung derselben getreten sei, so auch die flexion selbst aus einem verband analoger worttheile einmal erst entsprungen sein müsse. nothwendig demnach sind drei, nicht blosz zwei staffeln der entwickelung menschlicher sprache anzusetzen, des schaffens, gleichsam wachsens und sich aufstellens der wurzeln und wörter, die andere des emporblühens einer vollendeten flexion, die dritte aber des triebs zum gedanken, wobei die flexion als noch nicht befriedigend wieder fahren gelassen und was im ersten zeitraum naiv ge-

schah, im zweiten prachtvoll vorgebildet war; die verknüpfung der worte und strengen gedanken abermals mit hellerem bewustsein bewerkstelligt wird. es sind laub, blüte und reifende frucht, die, wie es die natur verlangt, in unverrückbarer folge neben und hinter einander eintreten*. durch die blosze nothwendigkeit einer ersten unsichtbaren, den beiden andern für uns sichtbaren perioden voraus gegangnen wird, dünkt mich, der wahn eines göttlichen ursprungs der sprache ganz beseitigt, weil es gottes weisheit widerstritte dem, was eine freie menschengeschichte haben soll, im voraus zwang an zu thun, wie es seiner gerechtigkeit entgegen gewesen wäre, eine den ersten menschen verliehne göttliche sprache für die nachlebenden von ihrem gipfel herab sinken zu lassen. was die sprache göttliches an sich trägt, hat sie, weil in unsere natur und seele überhaupt göttliches gespreitet ist.

Mit betrachtung der sprache, wie sie im letzten zeitraum erscheint, allein würde man nie dem geheimnis ihres ursprungs näher getreten sein, und allen aus dem gegenwärtigen sprachbestand nach dem etymon eines wortes forschenden pflegt es damit meistens fehlzuschlagen, da sie weder die bildungstheile von der wurzel rein abzulösen noch den sinnlichen gehalt derselben zu ermitteln vermögen.

Anfangs entfalteten sich, scheint es, die wörter unbehindert in idyllischem behagen, ohne einen andern haft als ihre natürliche vom gefühl angegebne aufeinanderfolge; ihr eindruck war rein und ungesucht, doch zu voll und überladen, so dasz licht und schatten sich

* nach Winkelmann (brief an Berendis 121) entfaltet sich in der kunst erst das nothwendige, dann das schöne, endlich das überflüssige.

nicht recht vertheilen konnten[1]. allmälich aber läszt ein unbewust waltender sprachgeist auf die nebenbegriffe schwächeres gewicht fallen und sie verdünnt und gekürzt der hauptvorstellung als mitbestimmende theile sich anfügen. die flexion entspringt aus dem einwuchs lenkender und bewegender bestimmwörter, die nun wie halb und fast ganz verdeckte triebräder von dem hauptwort, das sie anregten, mitgeschleppt werden, und aus ihrer ursprünglich auch sinnlichen bedeutung in eine abgezogne übergegangen sind, durch die jene nur zuweilen noch schimmert. zuletzt hat sich auch die flexion abgenutzt und zum bloszen ungefühlten zeichen verengt, dann beginnt der eingefügte hebel wieder gelöst und fester bestimmt nochmals äuszerlich gesetzt zu werden; die sprache büszt einen theil ihrer elasticität ein, gewinnt aber für den unendlich gesteigerten gedankenreichthum überall masz und regel.

Erst nach gelungner zergliederung der flexionen und ableitungen, wodurch Bopps scharfsinn so groszes verdienst errungen hat, hoben sich die wurzeln hervor und es ward klar, dasz die flexionen gröstentheils aus dem anhang derselben wörter und vorstellungen zusammen gedrängt sind, welche im dritten zeitraum gewöhnlich auszen voran gehn. ihm sind präpositionen und deutliche zusammensetzungen angemessen, dem zweiten flexionen, suffixe und kühnere composition, der erste liesz freie wörter sinnlicher vorstellungen für alle grammatischen verhältnisse auf einander folgen. die älteste sprache war melodisch aber weitschweifig und haltlos, die mittlere voll gedrungener poetischer kraft, die neue sprache sucht den abgang an schönheit durch harmonie

[1] man könnte sagen, dasz die flexionslose chinesische sprache gewissermaszen in der ersten bildungsperiode verharrt sei.

des ganzen sicher einzubringen, und vermag mit geringeren mitteln dennoch mehr.

Der den ursprung der sprache hüllende schleier ist gelüftet, nicht vollends aufgedeckt. es kann hier weder ausführbar noch mein zweck sein alle oder die meisten beweise für die vorgetragene ansicht aus zu heben, was ein eignes schweres buch fordern würde, ich strebe nur die wesentlichen grundlagen der untersuchung hinzustellen.

Nichts in der sprache, wie in der ganzen sie gleichsam auf ihren schosz nehmenden natur, geschieht umsonst, alles, was ich schon oben sagte, ausreichend ohne verschwendung. einfache mittel richten das stärkste aus, kein buchstab ursprünglich, steht bedeutungslos oder überflüssig.

Jeder laut hat seinen natürlichen, im organ das ihn hervorbringt gegründeten und zur anwendung kommenden gehalt. von den vocalen hält *a* die reine mitte, *i* höhe, *u* tiefe; *a* ist rein und starr, *i* und *u* sind flüssig und der consonantierung fähig. offenbar musz den vocalen insgesamt ein weiblicher, den consonanten insgesamt ein männlicher grund beigelegt werden.

Von den consonanten wird *l* das linde, *r* das rauhe bezeichnen. wahrzunehmen ist, dasz in vielen wörtern der ältesten sprache *r* waltet, wo die jüngeren *l* setzen, während das *s* der älteren dem *r* der jüngeren weicht. niemals aber gehn *s* und *l* in einander über. entweder wollte der sprachgeist eine entsprungene lücke ausgleichen, oder was richtiger scheint, beiderlei *r* sind auch in der aussprache schon verschieden, jenes dem *l* nahe rein und rollend, dieses mit *s* verwandte heiser und unrein.

Alle consonantverdoppelungen sind der ältesten

sprache ab zu erkennen, und erst allmälich durch assimilation verschiedner consonanten und zumal häufig aus anstoszendem *i* entsprungen. consonantlautabstufung, die sich am aller deutlichsten und zu zweien malen in den verschiebungen der deutschen sprache ereignete, pflegt mit wundervollem instinct, indem sie alle stummen laute verrückt, ihnen doch jedesmal wieder die rechte stelle anzuweisen. haben irgendwo in der sprache naturtrieb und freie kraft zusammen gewirkt, so geschah es in dieser höchst auffallenden erscheinung.

Der ursprache waren *e* und *o* fremd. wenn diphthonge und brechungen dem zweiten zeitraum, dem dritten umlaute und noch andere vocaltrübungen gemäsz sind, so wird man dem ersten vorzugsweise fast nur kurze vocale und einfache consonanten beizumessen haben. [jeder diphthong ist aus zwei silben hervorgegangen, *au* aus *a-u*, *ai* aus *a-i*, wie zumal die geschichte der flexion lehrt. dazwischen treten consonantierungen, *av* oder *va*, *aj* oder *ja*. alle brechungen setzen einsilbigkeit voraus; baira baurans ein bira burans.]

Doch die natur der einzelnen laute zu erörtern liegt mir hier nicht ferner ob; dies würde mehr da an seiner stelle sein, wo jene leibliche anlage unsers organismus auf die sprache sorgfältig angewandt werden soll.

Hebel aller wörter scheinen pronomina und verba. das pronomen ist nicht blosz, wie sein name könnte glauben machen, vertreter des nomens, sondern gerade zu beginn und anfang alles nomens. wie das kind dessen denkvermögen wach geworden ist 'ich' ausspricht, finde ich auch im Jadschurveda ausdrücklich anerkannt, dasz das ursprüngliche wesen 'ich bin ich' spreche und der mensch, wenn er gerufen werde 'ich bin es' antwortete. alle verba und nomina, das persön-

liche verhältnis an sich bezeichnend, fügen pronomina ein, wie sie in der dritten sprachperiode äuszerlich dazu ausgedrückt werden. als der mensch das erstemal sein ich, das im sanskrit aham lautet, sprach, stiesz er es aus voller brust im geleit eines kehlhauchs, und alle urverwandten zungen sind sich hierin gleich geblieben, nur dasz sie das reine *a* schwächen oder die gutturalstufe verschieben. im obliquen casus tritt ein halb zurück weisendes labiales *m* vor. das deutende *t* der angeredeten zweiten person musz hingegen im casus rectus und obliquus haften. gröszere manigfaltigkeit als die beiden ersten sich gegenüberstehenden personen fordert aber die fernere dritte, und ihr hauptkennzeichen war entweder *s* oder *t*, jenes vorzugsweise zur bezeichnung des flüssigen reflexivbegriffes, der sich auch dem verbum suffigiert.

Auszer dem belebenden pronomen liegt die gröste und eigentliche kraft der sprache im verbum, das fast alle wurzeln in sich darstellt.

Alle verbalwurzeln, deren anzahl im ersten sprachzeitraum beim beginn nicht über einige hundert hinaus gereicht zu haben braucht, aber äuszerst schnell wuchs, enthalten sinnliche vorstellungen, aus welchen unmittelbar auch analoge und abstracte knospen und sich erschlieszen konnten, wie z. b. dem begrif des athmens der des lebens, dem des ausathmens der des sterbens entsprieszt. es ist ein folgenschwerer satz, dasz licht und schall aus denselben wurzeln flieszen.

Alle verbalwurzeln wurden aber mit dem einfachsten aufwand an mitteln erfunden, indem ein consonant dem vocal vor- oder nachtrat. ob aus bloszem vocal wurzeln bestehn können, darf noch in zweifel gezogen werden, da nach dem vorhin vom wesen der vocale und conso-

nanten überhaupt gesagten die zeugung einer wurzel von dem sich vermählen beider geschlechter abhängig scheint. das sanskrit kennt keine allein von kurzem *a* gebildete wurzel, wogegen kurzes *i* als wurzel für den begrif gehn (die auch im lateinischen *i*, welches doch lang ist, blosz läge) und kurzes *u* als wurzel für tönen angenommen wird; ihnen beiden könnten aber consonanten abgefallen sein. unter den mit consonant und vocal gebildeten scheinen die consonantisch anlautenden den consonantisch auslautenden im alter voranzugehn, weil auch den vocalisch auslautenden ein zweiter consonant allmälich zuzutreten pflegt, nicht den vocalisch anlautenden vorzutreten, z. b. neben der wurzel mâ ergibt sich eine zweite wurzel mad, welche dem lat. metiri, unserm messen entspricht. etwas anders ist, dasz die wehenden anlaute *v h* und *s* vor liquiden bald vorzutreten bald abzufallen pflegen, was man nun für das ältere halte: das vortreten, denke ich.

Welchen vocal und welchen consonant der erfinder für ein verbum nehmen wollte, lag abgesehn von der natürlich vorbrechenden und sich geltend machenden organischen gewalt des lautes meist in seiner willkür, die gar nicht statt gefunden hätte, wäre sie von jenem einflusz immer und völlig abhängend, selbst aber mit feinerem oder gröberem gefühl geübt werden konnte. in diesen einfachsten bildungsgesetzen sehn wir also auch hier nothwendigkeit und freiheit einander durchdringen. wenn z. b. im sanskrit die wurzel pâ, gr. πιεῖν, sl. piti trinken ausdrückt, so hindert nichts, dasz ein andrer spracherfinder dafür auch kâ oder tâ ergriffen hätte. ein groszer theil der indogermanischen wurzeln hat blosz sein historisches urrecht, dem nur organische bestimmungen zutreten können. doch instinctmäszig ist

vorgesehn, dasz in der einzelnen sprache wenig oder keine gleichlautige wurzeln für verschiedene vorstellungen statt haben, d. h. von den erfindern nicht mehrmals dieselben laute für grundverschiedne vorstellungen gewählt wurden, was unabsehbar verwirren müste. zu unterscheiden hiervon ist aber sorgsam die uns oft unerkannte und dunkle verwandtschaft mehrfacher sinnlicher und abgezogner begriffe, die aus den buchstaben einer und derselben wurzel erwachsen.

Ob und wie viel wurzeln, die auf doppelten stummen consonant an und auslauten, man im ersten zeitraum gestatten dürfe, lassen die bisherigen untersuchungen noch unentschieden.

An jedem verbum können im zweiten zeitraum personen, numerus, tempus, modus und genus bezeichnet werden, die personen durch angefügte persönliche pronomina, die tempora meistens durch hilfswörter, die ursprünglich los angeschlossen allmälich zur flexion verwuchsen. auszer bezeichnung der vergangenheit durch ein solches hilfswort, trat zu gleichem zweck auch ein wiederholen der wurzel oder reduplication derselben ein, da das vergangne natürlicherweise im wiederholen seinen ausdruck findet. mit solcher reduplicierenden form hängt aber nach erlöschen der reduplicationssilbe noch der deutsche ablaut innig zusammen, und wie diphthonge in vocallängen sich verengen, thun es die reduplicationen im ablaute. in unsern deutschen mit ablaut gebildeten praeteriten darf demnach kein hilfsverbum einverleibt gedacht werden.

Alle nomina, d. h. die den sachen beigelegten namen oder eigenschaften setzen verba voraus*, deren sinnlicher

* aus dem verbum participium, aus participium adjectiv, aus adjectiv substantiv, aus substantiv partikel.

begrif auf jene angewandt wurde, z. b. unser hahn, goth. hana bezeichnet den krähenden vogel, setzt also ein verlornes verbum hanan voraus, das dem skr. kan, lat. canere entsprach, und dessen ablaut goth. hôn, ahd. huon uns zugleich über huon pullus gallinaceus, nhd. huhn ins klare bringt. nicht anders führt sich der sl. name des hahns pjetel auf pjeti singen, der litt. gaidys auf giedmi zurück. der wind, lat. ventus, sl. vjetr, litt. vejas, skr. vâju heiszt der wehende von vâ, goth. vaian spirare, genau wie ἄνεμος animus zum goth. anan spirare, unser geist zu einem alten geisan vento ferri gehören; den in vâju, vejas abgehenden linguallaut haben ventus wind vjetr, ebenso geist eingeschaltet, wie es unzählige mal, z. b. auch in unserm hund gegenüber dem lat. canis, gr. κύων geschah. hier strömen beispiele von allen seiten ohne ende zu. unser heute verdunkeltes bohne steht gleich dem lat. faba wurzellos, doch ergibt sich leicht, faba müsse aus fagba, bohne, ahd. bôna, folglich ein goth. bauna aus bagbana, bagbuna hervorgegangen sein, wozu auch das sl. bob gefügt werden darf; zu fagba, bagba lehrt uns dann das gr. φαγεῖν die rechte wurzel: fagba war eszbare frucht, wie auch fagus, unser ahd. puocha, nhd. buche und gr. φακῆ linse denselben ursprung verraten.

Höchst natürlich und menschlich aber war, dasz die sprachfindung jedem namen ein geschlecht ertheilte, wie es entweder an der sache selbst ersichtlich vorlag oder ihr in gedanken beigelegt werden konnte. in der flexion wurde jedoch das männliche genus am vollkommensten und rührigsten geprägt, das weibliche ruhiger und schwerer, so dasz jenem mehr consonanzen und kurze vocale, diesem lange zusagen, ein aus beiden erzeugtes neutrum sich aber in die eigenheiten beider

theilt. durch die unterscheidung der geschlechter wird mit dem glücklichsten grif, wie durch einen ruck, in alle lagen, denen das nomen unterzogen werden musz, regel gebracht und klarheit.

Diese lagen sind zumal verhältnisse des casus und numerus. während nemlich den gerad stehenden, im satz herschenden casus ein pronomen kennzeichnet, müssen die obliquen casus ihre räumlichen begriffe durch partikeln ausdrücken, die gleich jenen auxiliaren des verbums dem nomen hinzutreten, nach und nach fest mit ihm verwachsen manigfache flexionen erzeugen. den flexionen, als sie entsprangen, wird solcher verengungen und zusammenziehungen wegen überwiegend langer vocal oder diphthong zugestanden haben und wie er sich verdünnte, die flexion erblaszt sein. in den neueren sprachen sehn wir endlich die erblichne flexion fast oder ganz gewichen und von auszen durch artikel und praepositionen ersetzt, welche uns ahnen lassen, dasz die flexion selbst einmal aus ähnlichen bestandtheilen hervorgegangen sein muste. wenn das franz. le loup und du loup dem lat. lupus und lupi gleich steht, nachweislich aber aus ille lupus, de illo lupo entsprungen ist, so folgt dasz auch der ausgang *s* ein pronomen enthalten und die flexion *i* auf eine volle ursprüngliche form zurück geleitet eine partikel erscheinen lassen werde.

Da nun die partikeln selbst, mit ausnahme der dem angebornen organismus heimfallenden, halbthierischen interjectionen, ursprünglich lebendige nomina oder pronomina waren, denen nach und nach abgezogne functionen beigelegt werden, so ist der sprache lebendiger kreislauf abgeschlossen.

Die sprache kann einzelne und grosze vortheile fahren lassen, z. b. das mediüm und passivum, den

optativ, viele tempora und casus der form nach aufgeben und sich dafür mit deutlicheren umschreibungen schleppen oder auch den sinnlichen ausdruck mit gar nichts ersetzen, z. b. die schöne, beholfne dualform. eine zeitlang erreichten wir noch das skr. tschakšušî, das gr. ὄσσε durch 'beide augen', das gr. χεροῖν durch 'mit beiden händen', und der beisatz erweist die naturgemäszheit des alten dualis, endlich genügte das blosze 'augen' und 'händen'.

Ich bin in raschen umrissen über reichhaltige unerschöpfliche, meinem vortrag sich hier oft versagende sprachverhältnisse geglitten, um noch für eine allgemeinere betrachtung der angesetzten drei perioden raum zu gewinnen. es ergibt sich, dasz die menschliche sprache nur scheinbar und von einzelnem aus betrachtet im rückschritt, vom ganzen her immer im fortschritt und zuwachs ihrer inneren kraft begriffen angesehen werden müsse.

Unsere sprache ist auch unsere geschichte. wie eines volkes, eines reiches grund gelegt wurde von einzelnen geschlechtern, die sich vereinten, gemeinsame sitten und gesetze annahmen, im bunde handelten und den umfang ihres besitzthums erweiterten: so forderte auch die sitte einen findenden ersten act, aus dem alle nachfolgenden hergeleitet werden, auf den zurück sie sich beziehen. die dauer der gemeinschaft legte hernach eine menge von abänderungen auf.

Den stand der sprache im ersten zeitraum kann man keinen paradisischen nennen in dem gewöhnlich mit diesem ausdruck verknüpften sinn irdischer vollkommenheit; denn sie durchlebt fast ein pflanzenleben, in dem hohe gaben des geistes noch schlummern, oder nur halb erwacht sind. ihre schilderung darf ich etwa in folgende züge zusammen fassen.

Ihr auftreten ist einfach, kunstlos, voll leben, wie das blut in jugendlichem leib raschen umlauf hat. alle wörter sind kurz, einsilbig, fast nur mit kurzen vocalen und einfachen consonanten gebildet, der wortvorrat drängt sich schnell und dicht wie halme des grases. alle begriffe gehn hervor aus sinnlicher, ungetrübter anschauung, die selbst schon ein gedanke war, der nach allen seiten hin leichte und neue gedanken entsteigen. die verhältnisse der wörter und vorstellungen sind naiv und frisch, aber ungeschmückt durch nachfolgende, noch unangereihte wörter ausgedrückt. mit jedem schritt, den sie thut, entfaltet die geschwätzige sprache fülle und befähigung, aber sie wirkt im ganzen ohne masz und einklang. ihre gedanken haben nichts bleibendes, stätiges, darum stiftet diese früheste sprache noch keine denkmale des geistes und verhallt wie das glückliche leben jener ältesten menschen ohne spur in der geschichte. zahlloser same ist in den boden gefallen, der die andere periode vorbereitet.

In dieser haben alle lautgesetze sich vervielfacht und glänzend aufgethan. aus prachtvollen diphthongen und ihrer ermäszigung zu vocallängen entspringt neben der noch waltenden fülle der kurzen wollautender wechsel; auf solche weise rücken auch consonanten, nicht mehr überall durch vocale gesondert, aneinander und steigen kraft und gewalt des ausdrucks. wie aber die einzelnen laute sich fester schlieszen, beginnen partikeln und auxiliare näher anzurücken und indem sich der ihnen selbst einwohnende sinn allmälich abschwächt, mit dem wort das sie bestimmen sollten sich zu einigen. statt der bei verminderter sinneskraft der sprache schwer überschaulichen sonderbegriffe und unabsehbaren wortreihen ergeben sich wohlthätige anhäufungen und ruhe-

puncte, welche das wesentliche aus dem zufälligen, das waltende aus dem untergeordneten vortreten lassen. die wörter sind länger geworden und vielsilbig, aus der losen ordnung bilden sich nun massen der zusammensetzung. wie die einzelnen vocale in doppellaute drängten die einzelnen wörter sich in flexionen, und wie der doppelte vocal in dichter verengung wurden auch die flexionenbestandtheile unkenntlich, aber desto anwendbarer. zu fühllos gediehnen anhängen gesellen sich neue deutlicher bleibende. die gesamte sprache ist zwar noch sinnlich reich, aber mächtiger an gedanken und allem was diese knüpft, die geschmeidigkeit der flexion sichert einen wuchernden vorrat lebendiger und geregelter ausdrücke. um diese zeit sehen wir die sprache für metrum und poesie, denen schönheit, wollaut und wechsel der form unerläszlich sind, aufs höchste geeignet und die indische und griechische poesie bezeichnen uns einen im rechten augenblick erreichten, später unerreichbaren gipfel in unsterblichen werken.

Da nun aber die ganze natur des menschen, folglich auch die sprache dennoch in ewigem, unaufhaltbarem aufschwung begriffen sind, konnte das gesetz dieser zweiten periode der sprachentwicklung nicht für immer genügen, sondern muste dem streben nach einer noch gröszeren ungebundenheit des gedankens weichen, welchem sogar durch die anmut und macht einer vollendeten form fessel angelegt schien. mit welcher gewalt auch in den chören der tragiker oder in Pindars oden worte und gedanken sich verschlingen; es entspringt dabei das gefühl einer der klarheit eintrag thuenden spannung, die noch stärker in den indischen bild auf bild häufenden zusammensetzungen wahrnehmbar wird; aus dem eindruck solcher wahrhaft übermächtigen form

trachtete der sprachgeist sich zu entbinden, indem er den einflüssen der vulgaridiome nachgab, die bei dem wechselnden geschick der völker auf der oberfläche wieder neubefruchtend vortauchten. gegenüber dem seit einführung des christenthums versinkenden latein trieben auf andrer schicht und unterlage die romansprachen empor und neben ihnen machten sich im lauf der zeit die deutsche und die englische sprache nicht einmal mit ihren ältesten mitteln, sondern in der durch die blosze kraft der gegenwart bedingten mischung luft. den reinen vocalen war längst trübung, die wir durch umlaut, brechung und noch auf andere dem alterthum unbekannte weise bezeichnen, gefolgt, unserm consonantismus war beschieden verschoben, entstellt und verhärtet zu sein. man mag bedauern, dasz die reinheit des ganzen lautsystems geschwächt fast aus der fuge geriet; allein niemand wird auch verkennen, durch entsprungne zwischentöne seien unerwartet neue behelfe, mit welchen aufs freiste geschaltet werden konnte, zu wege gebracht worden. eine masse von wurzeln wurde durch solche lautänderungen verfinstert, fortan nicht mehr in ihrer sinnlichen urbedeutung, nur für abgezogne vorstellungen fort unterhalten; von den ehemaligen flexionen gieng das meiste verloren und wird durch reichere, freiere partikeln ersetzt, vielmehr überboten, weil der gedanke auszer der sicherheit auch an vielseitiger wendung gewinnen kann. wie schon die vier oder fünf griechischen und lateinischen casus an sich unvermögender erscheinen als die vierzehn der finnischen sprache, und dennoch mit aller solcher mehr scheinbaren als wirklichen behendigkeit diese weniger ausrichtet; so ist auch unsern neuern sprachen insgemein minder als man glauben sollte

dadurch benommen, dasz sie die überreiche form des griechischen verbums entweder unausgedrückt lassen oder wo es daran liegt umschreiben müssen.

Was das gewicht und ergebnis dieser erörterungen angeht, so mag ich mit einem einzigen aber entschiedenen beispiel ihrer beinahe enthoben sein. keine unter allen neueren sprachen hat gerade durch das aufgeben und zerrütten alter lautgesetze, durch den wegfall beinahe sämtlicher flexionen eine gröszere kraft und stärke empfangen als die englische und von ihrer nicht einmal *lehrbaren*, nur lernbaren fülle freier mitteltöne ist eine wesentliche gewalt des ausdrucks abhängig geworden, wie sie vielleicht noch nie einer andern menschlichen zunge zu gebote stand. ihre ganze überaus geistige, wunderbar geglückte anlage und durchbildung war hervorgegangen aus einer überraschenden vermählung der beiden edelsten sprachen des späteren Europas, der germanischen und romanischen, und bekannt ist wie im englischen sich beide zu einander verhalten, indem jene bei weitem die sinnliche grundlage hergab, diese die geistigen begriffe zuführte. ja die englische sprache, von der nicht umsonst auch der gröste und überlegenste dichter der neuen zeit im gegensatz zur classischen alten poesie, ich kann natürlich nur Shakespeare meinen, gezeugt und getragen worden ist, sie darf mit vollem recht eine weltsprache heiszen und scheint gleich dem englischen volk ausersehn künftig noch in höherem masze an allen enden der erde zu walten. denn an reichthum, vernunft und gedrängter fuge läszt sich keine aller noch lebenden sprachen ihr an die seite setzen, auch unsre deutsche nicht, die zerrissen ist wie wir selbst zerrissen sind, und erst manche gebrechen von sich abschütteln

müste ehe sie kühn mit in die laufbahn träte*: doch einige wohlthuende erinnerungen wird sie darbieten und wer möchte ihr die hofnung abschneiden? die schönheit menschlicher sprache blühte nicht im anfang, sondern in ihrer mitte; ihre reichste frucht wird sie erst einmal in der zukunft darreichen.

Wer aber kann dieser zukunft heimliche wege alle spähen? einer groszen weltordnung angemessen war, dasz im lauf der zeiten dichte wälder wichen vor rankenden reben und mehltragenden halmen, die beim anbau des erdbodens immer breitere strecken einnahmen; so auch scheinen unter auseinander gelaufenen, im weiten raum zerarbeiteten, später sich wieder berührenden sprachen endlich nur solche des feldes meister zu werden, die nährende geistesfrucht gebracht und geboren hatten. und statt dasz von den stufen jenes babylonischen thurms herab, der gen himmel strebte, wie es aegyptische pyramiden, griechische tempelhallen und der Christen gewölbte kirchen auch thun, alle menschensprachen getrübt und zerrüttet ausgetreten sein sollen, könnten sie einmal, in unabsehbarer zeit, rein und lauter zusammen flieszen, ja manches edle in sich aufnehmen, was jetzt in den sprachen verwilderter stämme wie zertrümmert liegt.

Nicht starr und ewig wirkendem naturgesetz, wie des lichts und der schwere, anheim gefallen waren die sprachen, sondern menschlicher freiheit in die warme hand gegeben, sowol durch blühende kraft der völker gefördert als durch deren barbarei niedergehalten, bald fröhlich gedeihend, bald in langer, magerer brache

* vgl. notes and queries vol. 7. 1853 no. 171. 5. febr. Jacob Grimm on the genius and vocation of the english language S. H. übersetzung dieser stelle vom zweiten satz des absatzes an bis hieher.

stockend. nur insofern überhaupt unser geschlecht am widerstreit des freien und nothwendigen unausweichlichen einflüssen einer auszerhalb ihm selbst waltenden macht unterliegt, werden auch in der menschlichen sprache vibration, abdämpfung oder gravitation dürfen gewahrt werden.

Wohin uns aber ihre geschichte den blick aufthut erscheinen lebendige regungen, fester halt und weiches, nachgibiges gelenk, unablässiges recken und falten der flügel, ungestillter wechsel, der noch nie zum letzten *abschlusz* gelangen liesz; alles verbürgt uns, dasz die sprache werk und that der menschen ist, tugenden und mängel unserer natur an sich trägt. ihre gleichförmigkeit wäre undenkbar, da dem neu hinzutretenden und nachwachsenden ein spielraum offen stehen muste, dessen nur das ruhig fortbestehende nicht bedarf. im langen, unabsehbaren gebrauch sind die wörter zwar gefestigt und geglättet, aber auch vernutzt und abgegriffen worden oder durch die gewalt zufälliger ereignisse verloren gegangen. wie die blätter vom baume fallen sie von ihrem stamm zu boden, und werden von neuen bildungen überwachsen und verdrängt: die ihren stand behaupteten, haben so oft farbe und bedeutung gewechselt, dasz sie kaum mehr zu erkennen sind. für die meisten einbuszen und verluste pflegt aber beinahe auf der stelle und von selbst sich ersatz und ausgleichung darzubieten. das ist das stille auge jenes hütenden sprachgeistes, der ihr alle wunden über nacht heilt und schnell vernarben läszt, alle ihre angelegenheiten ordnet und vor verwirrung bewahrt, nur dasz er einzelnen sprachen seine höchste gunst, andern geringere erwiesen hat. das ist auch, wenn man will, eine naturgrundkraft, die aus den uns angebornen, eingepflanzten urlauten unerschöpflich

hervorquillt, dem menschlichen sprachbau sich vermählt, jede sprache in ihre arme schlieszt. doch jenes lautvermögen steht zum sprachvermögen wie der leib zur seele, welche das mittelalter treffend die herrin, den leib den kämmerer oder das kammerweib nannte.

Von allem was die menschen erfunden und ausgedacht, bei sich gehegt und einander überliefert, was sie im verein mit der in sie gelegten und geschaffenen natur hervor gebracht haben, scheint die sprache das gröszte, edelste und unentbehrlichste besitzthum. unmittelbar aus dem menschlichen denken empor gestiegen, sich ihm anschmiegend, mit ihm schritt haltend ist sie allgemeines gut und erbe geworden aller menschen, das sich keinem versagt, dessen sie gleich der luft zum athmen nicht entrathen könnten, ein erwerb, der uns zugleich leicht und schwer fällt: leicht, weil von kindes beinen an die eigenheiten der sprache unserm wesen eingeprägt sind und wir unvermerkt der gabe der rede uns bemächtigen, wie wir gebärden und mienen einander ahsehn, deren abstufung endlos ähnlich und verschieden ist gleich der der sprache. poesie, musik und andere künste sind nur bevorzugter menschen, die sprache ist unser aller eigenthum, und doch bleibt es höchst schwierig sie vollständig zu besitzen und bis auf das innerste zu ergründen. die grosze menge reicht etwa schon mit dem halben vorrat der wörter oder mit noch weniger aus.

Musik aus todtem instrument geweckt, mit ihrem schweifenden, gleitenden, mehr gefühlten als verstandnen ausdruck, steht der alle gedanken deutlich fassenden, bestimmt greifenden, gegliederten sprache entgegen*, im

* viele können wol zusammen singen, aber nur einer kann reden. unwiss. doct. 895.

gesang aber tritt sie gesprochnen worten hinzu und gibt ihnen feierliches geleit. solchen herzerhebenden menschengesang vergleichen mag man dem der vögel, welcher über das bedürfnis thierischer schreie hinaus tiefer anhaltende empfindung bekundet, wie auch einzelne gelehrige vögel ihnen oft wiederholte weisen ablauschen und herpfeifen. dennoch, so beseelt er scheine, ist der süsze nachtigallenschlag immer derselbe und nur angeborne, unwandelbare fertigkeit, unsre musik aber aus dem gefühl und der phantasie der menschen hervorgegangen, überall verschieden. in zeichen gesetzt kann das lied nachgesungen, die musik nachgespielt, wie das wort aus dem buch gelesen werden. die sprachmaschine, von der ich oben redete, gieng davon aus die menschensprache weniger im gedanken als im wortschall nachzuahmen und physiologisch hinter den mechanismus der grundlaute zu kommen.

Darin aber dasz musik, was ihr name andeutet, und poesie einer höheren eingebung beigelegt, göttlich oder himmlisch genannt werden, zeugnis für der sprache übermenschlichen ursprung zu suchen, scheint schon darum unstatthaft, weil die sprache, bei welcher eine gleiche annahme gebricht, jenen beiden nothwendig voran gieng. denn aus betonter, gemessener recitation der worte entsprangen gesang und lied, aus dem lied die andere dichtkunst, aus dem gesang durch gesteigerte abstraction alle übrige musik, die nach aufgegebnem wort geflügelt in solche höhe schwimmt, dasz ihr kein gedanke sicher folgen kann. wer nun überzeugung gewonnen hat, dasz die sprache freie menschenerfindung war, wird auch nicht zweifeln über die quelle der poesie und tonkunst in vernunft, gefühl und einbildungskraft des dichters.

viel eher dürfte die musik ein sublimat der sprache heiszen als die sprache ein niederschlag der musik*.

Traun geheimnisvoll und wunderbar ist der sprache ursprung, doch rings umgeben von andern wundern und geheimnissen. schwerlich ein kleineres liegt in dem der sage, die bei allen völkern über den ganzen erdboden in gleicher unermessenheit und abwechselung zuckt und auftaucht, durch lange gemeinschaft der menschen erwachsen und weit fortgepflanzt worden sein musz. nicht sowohl in ihrem wesen selbst beruht das räthsel der sprache, als vielmehr in unsrer schwachen kunde von dem ersten zeitraum ihrer erscheinung, da sie noch in der wiege lag, den ich dadurch mir zu verdeutlichen strebte, dasz ich kunstlose einfachheit sinnlicher entfaltung als sein merkmal setzte: um diesen angel dreht sich meine ganze vorstellung, darin unterscheide ich mich von meinen vorgängern. war uns das wesen der flexion nicht auch in dunkel gehüllt, eh eine decke nach der andern davon weggezogen wurde? zahllose begebenheiten selbst aus historischer zeit sind erst dem auge des geschichtforschers klar geworden, des menschengeschlechts älteste geschichte lagert verborgen gleich der seiner sprache, und nur die sprachforschung wird lichtstralen darauf zurück werfen.

Eine sprache ist schöner und scheint ergibiger als die andere; dem dichter verschlägt es nichts, und er weisz geringen mitteln dennoch grosze wirkung zu entlocken, wie aus grauem gefieder entzückende stimme schallt. auch die nordischen skalden verstanden sich auf kunstreiche liederform und thürmten band auf band, bild auf bild: ist man eingedrungen in ihre weise, so

* musik, nach Hegel, die aufhebung aller räumlichkeit.

läszt sie bald leer, weil immer nur von kampf, sieg und milde gesungen wird, Pindar regt aber alle saiten der seele an. ein mythus ist tiefer und lieblicher als der andere, doch am stärksten ergreift uns der, um welchen die gröste fülle der poesie erwachsen war; gegen den griechischen, dessen grundlage er oft bilden soll, verliert der aegyptische, weil er fast nur samen und frucht darreicht, laub und blüte der dichtkunst ihm ganz mangeln. in der gesamten poesie steht aber nichts seiner anlage und entfaltung nach der sprache so nah und ebenbürtig als das epos, und auch es musz von einfachem boden zur höhe sich aufgeschwungen haben, die wir an ihm bewundern. wer in ihm und in den edelsten denkmälern menschlicher dichtung und sprache nur geschwächten widerschein oder abglanz gewaltigerer gestaltungen, die der welt entschwunden seien, sehn wollte, erklärte damit weniger als nichts, weil das worauf zurück geschoben wird, stände es irgend zu erlangen, noch lauter nach erklärung schriee.

Ich gedachte hier zuletzt aufzuwerfen, in wie fern mit der im voraus gehenden fast einzig und allein ins auge gefaszten indogermanischen sprache die andern zungen der erde aus einer und derselben quelle dürfen abgeleitet werden oder nicht? wesentlich würde das über den allgemeinen ursprung aller gewonnene ergebnis dadurch nicht verändert werden: doch hinter dem auszerordentlichen kaum sich abgrenzenden umfang einer solchen auch nur angerührten untersuchung, selbst wenn ich beispielsweise sie auf den verhalt der finnischen sprache zu jener, worüber ich verschiedentlich nachgedacht habe, einschränken wollte, müsten meine kräfte bleiben. bei dem fortgang historischer forschungen, wenn sie sich zu allen bedeutenden sprachgeschlechtern

der erde gewendet haben, werden grosze aufschlüsse für das hier erörterte und hoffentlich zu gunsten des von mir gefundnen sich einmal ergeben. jetzt aber würde ich doch nur das wasser getrübt haben für fremde fischer.

Enden kann ich nicht, ohne vorher dem genius des mannes zu huldigen, der was ihm an tiefe der forschung oder strenge der gelehrsamkeit abgieng, durch sinnvollen tact, durch reges gefühl der wahrheit ersetzend wie manche andere auch die schwierige frage nach der sprache ursprung bereits so erledigt hatte, dasz seine ertheilte antwort immer noch zutreffend bleibt, wenn sie gleich mit andern gründen, als ihm dafür schon zu gebot standen, aufzustellen und zu bestätigen ist.

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, Stallschreiberstr. 47.

In Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung in Berlin sind erschienen:

JACOB GRIMM, KLEINERE SCHRIFTEN.

Drei Bände. gr. 8. 1864 bis 1866. Velinpapier. Preis: 8 Thlr. 15 Sgr.

I. Reden und Abhandlungen.

Preis: 2 Thlr. 15 Sgr.

Inhalt: *Selbstbiographie. — Meine entlassung. — *Italienische und skandinavische reiseeindrücke. — Frau Aventiure klopft an Beneckes thür. — *Das wort des besitzes (jubelschrift zu Savignys doctor-jubiläum). — Rede auf Wilhelm Grimm. — Rede über das alter. — Ueber schule, universität, akademie. — Ueber den ursprung der sprache. — †Ueber etymologie und sprachvergleichung. — *Ueber das pedantische in der deutschen sprache. — Rede auf Schiller. — Anhang von kleineren aufsätzen.

II. Abhandlungen zur Mythologie und Sittenkunde.

Mit einer photolithographischen Tafel. Preis: 3 Thlr.

Inhalt: *Ueber zwei entdeckte gedichte aus der zeit des deutschen heidenthums. — *Deutsche grenzalterthümer. — *Ueber das finnische epos — Ueber Marcellus Burdigalensis. — Ueber die Marcellischen formeln. — *Ueber schenken und geben. — Ueber das verbrennen der leichen. — Ueber den liebesgott. — *Ueber eine urkunde des XII. jahrhunderts. — Ueber frauennamen aus blumen. — Ueber die namen des donners. — †Ueber das gebet.

III. Abhandlungen zur Literatur und Grammatik.

Mit einer photolithographischen Tafel. Preis: 3 Thlr.

Inhalt: Gedichte des mittelalters auf könig Friedrich I. den Staufen und aus seiner sowie der nächstfolgenden zeit. — *Ueber diphthongen nach weggefallnen consonanten. — *Ueber Iornandes und die Geten. — Ueber den personenwechsel in der rede. — Ueber einige fälle der attraction. — Von vertretung männlicher durch weibliche namensformen. — †Der traum von dem schatz auf der brücke.

Die mit einem * bezeichneten Abhandlungen sind nur in den Schriften der Akademie veröffentlicht worden, die mit einem † bezeichneten waren bisher ungedruckt; die übrigen Abhandlungen sind gröfstentheils nur in einer sehr kleinen Zahl von Einzelabdrücken in den Buchhandel gekommen.

Hiermit liegen die 'Kleineren Schriften' Jacob Grimms, soweit sie in die Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften übergegangen oder für dieselben ursprünglich bestimmt waren, vollständig vor.

Ein vierter Band, der diese Sammlung der 'Kleineren Schriften von Jacob Grimm' beschliefsen wird, soll die im Monatsbericht der Akademie abgedruckten und die bedeutenderen Aufsätze aus verschiedenen Zeitschriften umfassen.

Zeitschrift
für
Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft.

Herausgegeben
von
Prof. Dr. M. Lazarus und **Prof. Dr. H. Steinthal.**

Erster bis vierter Band 1859—1866.

Die Aufgabe, welche sich diese Zeitschrift gesteckt hat, ist im Allgemeinen: eine Erkenntniß des Volksgeistes zu bereiten, wie die bisherige Psychologie eine des individuellen Geistes erstrebte. Es soll die Geschichte der Menschheit, der einzelnen Völker und ihrer Bestrebungen, nicht nur als Thatsache kennen gelernt, sondern auch nach ihren innersten Gründen begriffen werden. Demnach kann alles was im Verlauf der Geschichte als Saat oder Frucht, als Bedingung oder Erfolg des öffentlichen Geisteslebens sich darstellt, Gegenstand der Betrachtung unserer Zeitschrift werden, alle Arten von Strebungen und Leistungen des Kulturlebens bis hinauf zu den Ideen, welche den Genius einer Nation erfüllen und bewegen.

Die Sprache ist diejenige Erscheinung im Leben eines Volksgeistes, über welche uns die Thatsachen am vollkommensten vorliegen, und aus der mannichfaltige Lichtstrahlen auf andere Gebiete desselben geworfen werden. Die Sprachwissenschaft, wie sie hier bearbeitet werden soll, verschieden von Philologie und rein empirischer Linguistik, hat auf dem Wege der exacten Forschung vornehmlich die psychologischen Gesetze zu begründen, nach welchen die Idee der Sprache sich im Menschen verwirklicht.

Aus dem Inhalte der bisher erschienenen Hefte mögen hier folgende Arbeiten hervorgehoben sein:

Erster Band.

1. **M. Lazarus** und **H. Steinthal**, Einleitende Gedanken über Völkerpsychologie. — **H. Steinthal**, Ueber die unpersönlichen Zeitwörter. — 2. **H. Steinthal**, Assimilation und Attraction, psychologisch beleuchtet. — 3. **Paul Heyse**, Ueber italienische Volkspoesie. — **M. Lazarus**, Geographie und Psychologie. — Prof. **Pott**, Ueber Mannichfaltigkeit des sprachlichen Ausdrucks nach Laut und Begriff. — 4. **v. Eckstein**, Der Sitz der Cultur in der Urwelt. — **H. Steinthal**, Ueber den Idealismus in der Sprachwissenschaft. — Derselbe, Zur Charakteristik der semitischen Völker. — 5. Dr. **L. Tobler**, Versuch eines Systems der Etymologie mit besonderer Rücksicht auf Völkerpsychologie. — **G. Gerland**, Psychologische Anthropologie. — **Nöldeke**, Die Schlange nach arabischem Volksglauben. — 6. **M. Lazarus**, Ueber den Ursprung der Sitten. — **H. v. Blomberg**, Das Theatralische in Art und Kunst der Franzosen. — **H. Steinthal**, Ueber Substanz und Person.

Zweiter Band.

1. H. Steinthal, Die urſprüngliche Form der Sage von Prometheus. — Dr. L. Tobler, Uebergang zwiſchen Tempus und Modus. — M. Lazarus, Verdichtung des Denkens in der Geſchichte. Ein Fragment. — H. Steinthal, Ueber den Aberglauben. — Fr. Müller, Rede zweier Maori an den Kaiſer von Oeſterreich. — 2. H. Steinthal, Die Sage von Simſon. — H. v. Blomberg, Ueber das Theatraliſche in Art und Kunſt der Franzoſen. II. Kunſt. — Dr. L. Tobler, Ueber die dichteriſche Behandlung der Thiere. — H. Steinthal, Ueber Charakteriſtik der Sprachen. — Derſelbe, Ueber das Paſſivum. — 3. W. Lübke, Der gothiſche Styl und die Nationalitäten. — H. Steinthal, Der Durchbruch der ſubjectiven Perſönlichkeit bei den Griechen. (Ein geſchichts-pſychologiſcher Verſuch). — 4. M. Lazarus, Ueber das Verhältniß des Einzelnen zur Geſammtheit. — H. Steinthal, Ueber die Wurzeln der Sprache. — H. Schwabe, Die Engländer und ihre Kohlenarbeiter.

Dritter Band.

1. M. Lazarus, Einige ſynthetiſche Gedanken zur Völkerpſychologie. — Dr. Ludwig Rüdiger, Ueber Nationalität. — 2. Dr. Paul Laband, Die rechtliche Stellung der Frauen im altrömiſchen und germaniſchen Recht. — C. Arendt, Darſtellung einiger intereſſanten Eigenthümlichkeiten der ungariſchen Sprache. — 3. Dr. L. Tobler, Das Wort in der Geſchichte der Religion. — Dr. Berthold Delbrück, Die Entſtehung des Mythos bei den indogermaniſchen Völkern. Ein pſychologiſcher Verſuch. — Dr. L. Tobler, Innere Sprachformen des Zeitbegriffes. — C. Arendt, Ein Hauptzug der ungariſchen Poeſie. — Prof. Pott, Ueber Mannichfaltigkeit des ſprachlichen Ausdrucks. (Wetter, Himmel, Gott.) — H. Steinthal, Die Zählmethode der Mandenga-Neger. — 4. M. Lazarus, Ueber die Ideen in der Geſchichte. — Dr. Berthold Delbrück, Ueber das Verhältniß zwiſchen Religion und Mythologie.

Vierter Band.

1. Emil Wohlwill, Die Entdeckung des Iſomorphismus. — C. Arendt, Darſtellung einiger intereſſanten Eigenthümlichkeiten der ungariſchen Sprache. — W. Radloff, Ueber die Formen der gebundenen Rede bei den altaiſchen Tataren. — 2. Adolf Tobler, Ueber das volksthümliche Epos der Franzoſen. — H. Steinthal, Die Geſchichte als Erziehung der Menſchheit. — 3. Richard Böckh, Die ſtatiſtiſche Bedeutung der Volksſprache als Kennzeichen der Nationalität. — 4. Hermann Cohen, Die platoniſche Ideenlehre, pſychologiſch entwickelt. — H. Steinthal, Zur Styliſtik. — M. Lazarus, Zur Geſchichte der Naturwiſſenſchaften.

Preis des Bandes von 4 Heften (zu ca. 8 Bogen) 3 Thlr. Einzelne Hefte des erſten Bandes (in 6 Heften zu 5 Bogen erſchienen) ſind zum Preiſe von 15 Sgr., einzelne Hefte von den folgenden Bänden (in je 4 Heften erſchienen) zum Preiſe von 25 Sgr. zu erhalten; vom zweiten und dritten Bande können nur noch ausnahmsweiſe einzelne Hefte abgegeben werden.

Steinthal (H.), Charakteristik der hauptsächlichsten Typen des Sprachbaues. Zweite Bearbeitung seiner „Classification der Sprachen". 1860. gr. 8. geh. 2 Thlr.

Nach der von *W. v. Humboldt* geschaffenen Methode werden neun der hauptsächlichsten Sprach-Typen als eben so viele grundverschiedene Systeme dargestellt, deren jedes auf ein eigenthümliches Princip gebaut ist. So wird die vom Verf. schon in früheren Schriften behauptete principielle Verschiedenheit der Sprachen und namentlich der wesentlichste Unterschied zwischen formlosen und Form-Sprachen durch ausgeführte historische Darlegungen bewiesen und nach ihren wichtigsten Zügen vorgeführt. Dem Sprachforscher wie dem Psychologen mufs der hier eröffnete Einblick in eine ungeahnte Mannichfaltigkeit und häufig genug Seltsamkeit der Redeweisen von nicht geringem Interesse sein. Ein diesen Charakteristiken vorausgeschickter allgemeiner Abschnitt legt die Grundlage der befolgten Methode und besonders den Unterschied zwischen Grammatik und Logik in möglichster Kürze und Bestimmtheit dar, und ein ihnen folgender Abschnitt legt die charakterisirten Sprachen in einer Classification dem Leser vor die Augen.

Steinthal (H.), Geschichte der Sprachwissenschaft bei den Griechen und Römern mit besonderer Rücksicht auf die Logik. 1863. gr. 8. geh. 3 Thlr. 25 Sgr.

Nach der allgemeinen Einleitung, in welcher Wesen und Beziehungen der Geschichte, sowie die Keime der Sprachwissenschaft bei verschiedenen Völkern dargelegt werden, wird zunächst die Geschichte der Sprachbetrachtung bei den Philosophen gegeben und dann die Stellung der Grammatiker im Zusammenhange mit dem allgemeinen Geiste der Griechen in der Zeit nach Alexander und mit der Entwicklung des griechischen Geistes überhaupt dargelegt. — Hierauf wird das Object, an welchem sich die griechische Grammatik entwickelte, nämlich die Sprache der alten Classiker und im Gegensatze zu ihr die spätere Sprache, endlich die Eigenthümlichkeit des Textes der homerischen Dichtungen, im Verhältnisse zur grammatischen Thätigkeit charakterisirt, wobei das Wesen der vielbesprochenen *Κοινή* ausführlicher zu bestimmen versucht wird. — Dann folgt der Versuch einer gründlichen Darstellung des Kampfes für und gegen die Analogie und Anomalie. Endlich wird die Grammatik der Alten sowohl nach ihrem allgemeinen Geiste, als auch nach ihren wesentlichen Ergebnissen im Einzelnen angeführt, insofern letztere entweder an sich wichtig sind oder als die Verwirklichung grammatischer Ideen zu gelten haben.

00101910

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 18 July, 2018